宁波市2022学年第二学期期末试题

高二数学试卷参考答案

第I卷

一、单项选择题（本大题共12小题，每小题3分，共36分．每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，不选、多选、错选均不得分．）

1-5：DABBC　6-10：ADCBD　11-12：AC

二、多项选择题（本大题共4小题，每小题4分，共16分．每小题列出的四个备选项中有多个是符合题目要求的，全部选对得4分，部分选对且没错选得2分，不选、错选得0分．）

13．AC　14．ACD　15．AD　16．ABD

三、填空题（本大题共4小题，每空3分，共15分．）

17．$\frac{1}{2};\frac{3}{4}$　18．1804π（或$44\sqrt{1681}\pi$或$22\sqrt{6724}\pi$）　19．$3+2\sqrt{2}$　20．$(1,2)$

四、解答题（本大题共3小题，共33分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．）

21．（本题满分11分）

解：（I）由题：$0.02+0.04\times2+10a+0.2+0.56=1$．　…………………………3分

所以$a=0.014$．　…………………………5分

（II）首先$0.04<0.2<0.04+0.2$，

所以第20百分位数位于$[20,30]$．　…………………………7分

所以第20百分位数为$20+\dfrac{0.2-0.04}{0.24-0.04}\times10=28$．　…………………………11分

22．（本题满分11分）

解：（I）由题：$T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，又$\omega>0$，所以$\omega=2$．　…………………………2分

又$f(\frac{\pi}{2})=f(\frac{2\pi}{3})$，得$\sin(\pi+\varphi)=\sin(\frac{4}{3}\pi+\varphi)$

得$\pi+\varphi=\frac{4}{3}\pi+\varphi+2k\pi$或$\pi+\varphi=\pi-(\frac{4}{3}\pi+\varphi)+2k\pi$，

解得$\varphi=k\pi-\dfrac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$．　………………5分

（II）若$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，则$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$　…………………………6分

所以$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$．

当$x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，所以$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$．　……………11分

23.（本题满分 11 分）

解:（I）当$a=2$时，$f(\frac{1}{4})=\log_2\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+\frac{1}{\frac{1}{4}+1}=-\frac{7}{10}$ ……………………………2 分

（II）已知$a>1$，则

$f(\frac{1}{a^2})=\log_a\frac{1}{a^2}+a\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\frac{1}{a^2}+1}=-2+\frac{1}{a}+\frac{1}{\frac{1}{a^2}+1}<-2+1+1=0$,

$f(1)=\log_a 1+a\cdot 1+\frac{1}{1+1}=a+\frac{1}{2}>0$,

由零点存在定理知，存在$x_0\in(\frac{1}{a^2},1)$，使得$f(x_0)=0$ ……………………………4 分

设$0<x_1<x_2$,

$f(x_1)-f(x_2)=\log_a x_1+ax_1+\frac{1}{x_1+1}-(\log_a x_2+ax_2+\frac{1}{x_2+1})$

$=\log_a\frac{x_1}{x_2}+a(x_1-x_2)+\frac{1}{x_1+1}-\frac{1}{x_2+1}=\log_a\frac{x_1}{x_2}+\frac{a(x_1-x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}[(x_1+1)(x_2+1)-\frac{1}{a}]$

由$a>1$，$0<x_1<x_2$，可得$\log_a\frac{x_1}{x_2}<0,\frac{a(x_1-x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}<0,(x_1+1)(x_2+1)-\frac{1}{a}>0$

于是$f(x_1)-f(x_2)<0$，由单调性定义可知$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增

因此函数$f(x)$的零点个数为 1 个. ……………………………6 分

（III）由（II）知$x_0\in(\frac{1}{a^2},1)$，从而$\sqrt{x_0}\in(\frac{1}{a},1)$，又$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增

于是$f(\sqrt{x_0})>f(\frac{1}{a})=\log_a\frac{1}{a}+a\times\frac{1}{a}+\frac{1}{\frac{1}{a}+1}=\frac{1}{\frac{1}{a}+1}>\frac{1}{2}$, ……………………………8 分

又由$f(x_0)=0$，得$\log_a x_0+ax_0+\frac{1}{x_0+1}=0$，即得$\log_a x_0=-ax_0-\frac{1}{(x_0+1)}$,

所以$f(\sqrt{x_0})=\log_a\sqrt{x_0}+a\sqrt{x_0}+\frac{1}{\sqrt{x_0}+1}=\frac{1}{2}\log_a x_0+a\sqrt{x_0}+\frac{1}{\sqrt{x_0}+1}$

$=-\frac{1}{2}ax_0-\frac{1}{2(x_0+1)}+a\sqrt{x_0}+\frac{1}{\sqrt{x_0}+1}=(\sqrt{x_0}-\frac{1}{2}x_0)a+\frac{1}{\sqrt{x_0}+1}-\frac{1}{2(x_0+1)}$,

由$\sqrt{x_0}-\frac{1}{2}x_0=-\frac{1}{2}(\sqrt{x_0}-1)^2+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$，得$(\sqrt{x_0}-\frac{1}{2}x_0)a<\frac{1}{2}a$,

由$\sqrt{x_0}<1$，得$x_0<\sqrt{x_0}$，从而$\frac{1}{\sqrt{x_0}+1}-\frac{1}{2(x_0+1)}<\frac{1}{x_0+1}-\frac{1}{2(x_0+1)}=\frac{1}{2(x_0+1)}<\frac{1}{2}$,

所以$f(\sqrt{x_0})<\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}$，因此$\frac{1}{2}<f(\sqrt{x_0})<\frac{a+1}{2}$. ……………………………11 分

第II卷

五、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．每小题列出的四个备选项中有多个是符合题目要求的，全部选对得 5 分，部分选对且没错选得 2 分，不选、错选得 0 分．）

24．ABD　　25．ABD　　26．BC　　27．ACD

六、解答题（本大题共 2 小题，共 30 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．）

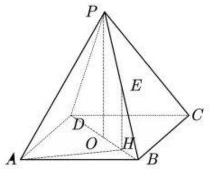
28．（本题满分 15 分）

解：（I）设 $AB=x$，则 $V=\frac{1}{3}x^2\cdot h=\frac{2\sqrt{2}}{3}x^2=\frac{8\sqrt{2}}{3}$．解得 $x=2$．　…………………………2 分

所以侧棱长 $PA=\sqrt{2+8}=\sqrt{10}$，侧高 $h_{侧}=3$．

所以表面积为 $S=2^2+4\times\frac{1}{2}\times2\times3=16$．　…………………………5 分

（II）连接 BD，取 BD 的中点 O，OB 的中点 H，连接 OP,HE,OH



由正四棱锥的性质可得 $OP\perp$ 面$ABCD$，所以 $EH\perp$ 面$ABCD$，

所以 $\angle EAH$ 就是直线 AE 与平面 $ABCD$ 所成角．　……………7 分

在 $Rt\Delta AEH$ 中，$EH\perp AH$，$EH=\sqrt{2}$，$AH=\frac{\sqrt{10}}{2}$，

所以 $\tan\angle EAH=\frac{EH}{AH}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$；

直线 AE 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　……………10 分

（III）过 A 作 $AT\perp PB$ 于 T，连接 TC，由对称性得 $TC\perp PB$，

则 $\angle ATC$ 为二面角 $A-PB-C$ 的平面角．　…………………………12 分

ΔATC 中，$AC=2\sqrt{2}$．$AT=CT=\frac{3}{5}\sqrt{10}$

于是 $\cos\angle ATC=\frac{AT^2+CT^2-AC^2}{2AT\cdot CT}=\frac{\frac{18}{5}\times2-8}{\frac{18}{5}\times2}=-\frac{1}{9}$．

则所求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $-\frac{1}{9}$．　…………………………15 分

29．（本题满分 15 分）

解：（I）$a=3$ 时，$f(x)=\begin{cases}-3x,x\geq3\\-2x^2+3x,x<3\end{cases}$

则有 $\begin{cases}x\geq3\\-3x\geq-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<3\\-2x^2+3x\geq-2\end{cases}$，解得 $x\in[-\frac{1}{2},2]$；　…………………………3 分

（II）（方法 1）显然 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的一个零点，

于是问题转化为 $g(x)=-x+|x-a|$ 在 $[-1,0)\cup(0,1]$ 上恰有一个零点　…………………………4 分

于是 $g(x)=\begin{cases}-a, x\ge a\\ -2x+a, x<a\end{cases}$，显然 $-a\neq 0$，否则零数有无数个零点

则有 $\begin{cases}\frac{a}{2}<a\\ \frac{a}{2}\in[-1,0)\cup(0,1]\end{cases}$，解得 $0<a\le 2$ …………………………8 分

（方法 2）由已知得 $f(x)=\begin{cases}-ax, x\ge a\\ -2x^2+ax, x<a\end{cases}$

当 $a=0$ 时，当 $0\le x\le 1$ 时，$f(x)=0$，有无数个零点，不合题意，舍去；

当 $a>0$ 时，如图 1，此时函数 $y=-2x^2+ax$ 的对称轴 $\frac{a}{4}\le a$，要使得 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有且仅有两个零点，只要 $\frac{a}{2}\le 1$，即 $0<a\le 2$；

当 $a<0$ 时，如图 2，此时函数 $y=-2x^2+ax$ 的对称轴 $\frac{a}{4}>a$，可得 $f(x)$ 在 R 上单调递增，不合题意，舍去；

综上：实数 a 的取值范围为 $(0,2]$． …………………………8 分

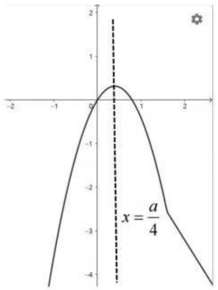


图 1

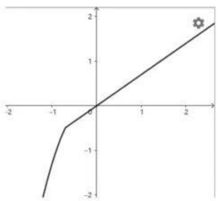


图 2

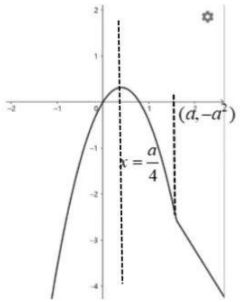


图 3

（III）由 $f(x)=\begin{cases}-ax, x\ge a\\ -2x^2+ax, x<a\end{cases}$，知 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{a}{4}\right]$ 上递增，在 $[\frac{a}{4},+\infty)$ 上递减，如图 3.

①当 $m\in[f(a),f(\frac{a}{4}))$ 即 $m\in[-a^2,\frac{a^2}{8})$ 时，x_1,x_2 是方程 $-2x^2+ax=m$ 的两根，且 $x_2\in(\frac{a}{4},a]$，

所以 $\frac{x_1^2+mx_2}{x_1x_2}=\frac{x_1^2+2x_1x_2^2}{x_1x_2}=\frac{x_1}{x_2}+2x_2=\frac{\frac{a}{2}-x_2}{x_2}+2x_2=\frac{a}{2x_2}+2x_2-1$．

又 $2x_2\in\left(\frac{a}{2},2a\right]$，由 $a\in[4,+\infty)$ 可知 $\sqrt{a}\le\frac{a}{2}$，

所以 $\dfrac{x_1^2+mx_2}{x_1x_2}=\dfrac{a}{2x_2}+2x_2-1\in\left(\dfrac{a}{2}+1,2a-\dfrac{1}{2}\right]$. ……………………………11 分

②当 $m\in(-\infty,f(a))$ 即 $m\in(-\infty,-a^2)$ 时，x_1 是 $-2x^2+ax=m$ 的小根且 $x_1<-\dfrac{a}{2}$；

x_2 是 $-ax=m$ 的根，即 $m=-ax_2$.

所以 $\dfrac{x_1^2+mx_2}{x_1x_2}=\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{m}{x_1}=\dfrac{ax_1}{2x_1^2-ax_1}+\dfrac{-2x_1^2+ax_1}{x_1}=-\dfrac{a}{a-2x_1}+a-2x_1$.

又 $a-2x_1>2a$，所以 $\dfrac{x_1^2+mx_2}{x_1x_2}=-\dfrac{a}{a-2x_1}+a-2x_1\in(2a-\dfrac{1}{2},+\infty)$.

综上：$\dfrac{x_1^2+mx_2}{x_1x_2}\in(\dfrac{a}{2}+1,+\infty)$. ……………………………15 分