百校联盟 2020 届普通高中教育教学质量监测考试

理科数学　参考答案

本试卷防伪处为：

得到的函数为偶函数

求实数 a 的取值范围

1. C 【解析】由 $|x|\cdot(1-x)\leqslant 0$，解得 $x\geqslant 1$，或 $x=0$，$\therefore A=\{x|x\geqslant 1$，或 $x=0\}$，由 $1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}>0$，解得 $x>1$，或 $x<0$，$\therefore B=\{x|x>1$，或 $x<0\}$，$\therefore A\cup B=\{x|x\geqslant 1$，或 $x\leqslant 0\}$.

2. C 【解析】设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$，由 $|z+i|=2$，可得 $x^2+(y+1)^2=4$，$\therefore(y+1)^2=4-x^2\geqslant 0$，$\therefore -2\leqslant x\leqslant 2$，又 $\because |z-1+i|=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+4-x^2}=\sqrt{5-2x}(-2\leqslant x\leqslant 2)$，$\therefore |z-1-i|$ 的最大值等于 3.

3. B 【解析】$\because(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，$\therefore(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^2=5$，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{5}{2}$，$\therefore$ 向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

4. D 【解析】全称命题的否定为特称命题.

5. A 【解析】设直线 l 方程为 $x=ty+\frac{1}{2}$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}x=ty+\frac{1}{2}\\ y^2=2x\end{cases}$，得 $y^2-2ty-1=0$，$\therefore y_1+y_2=2t$，$y_1y_2=-1$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|MC|\cdot|y_1-y_2|=\frac{3}{4}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{3}{2}\sqrt{t^2+1}\geqslant\frac{3}{2}$，$\therefore\triangle ABC$ 面积的最小值为 $\frac{3}{2}$.

6. B 【解析】$\because f(x)=\frac{a}{2}\sin 2x-\cos 2x$，$\therefore f(x+\frac{\pi}{3})=\frac{a}{2}\sin(2x+\frac{2\pi}{3})-\cos(2x+\frac{2\pi}{3})=\frac{-a+2\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}a+2}{4}\cos 2x$，$\therefore a=2\sqrt{3}$.

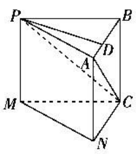
7. C 【解析】由题意可知，满足条件的时间段为 7：50～8：00，8：20～8：30，共 20 分钟，由几何概型知所求概率为 $\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$.

8. C 【解析】由 $M-N=112$，得 $2^{2n-1}-2^n=112$，解得 $n=4$，$\therefore(2x^2+1)^n$ 的展开式中各项系数之和为 $3^4=81$.

9. B 【解析】由三视图知，该几何体为一个圆柱挖去半个球和一个圆锥. $\therefore V=16\pi-\frac{1}{3}\times 4\pi\times 2-\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times 2^3=8\pi$.

10. D 【解析】根据题意，设函数 $f(x)=\frac{2x}{\ln x}$，则 $a=f(2)$，$b=f(3)$，$c=f(5)$. $\because f'(x)=\frac{2(\ln x-1)}{(\ln x)^2}$，当 $x\in(1,e)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数. $\therefore f(3)<f(5)$，即 $b<c$，又 $\because 4\ln 5=\ln 625<\ln 1024=10\ln 2$，$\therefore a=\frac{4}{\ln 2}<\frac{10}{\ln 5}=c$，同理 $4\ln 3=\ln 81>\ln 64=6\ln 2$，$\therefore a=\frac{4}{\ln 2}>\frac{6}{\ln 3}=b$，$\therefore c>a>b$.

11. D 【解析】由已知可知 $PD\perp$ 平面 ABC，$\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，又因为 $AB\perp BC$，$\therefore BC\perp$ 平面 PAB，$\therefore$ 可构造直三棱柱 $PAB-MNC$，直三棱柱 $PAB-MNC$ 的外接球就是三棱锥 $P-ABC$ 的外接球，且球心 O 为直三棱柱上下底面三角形外接圆圆心连线的中点. 在 $\triangle PAB$ 中，由正弦定理可求得外接圆半径为 $\frac{\sqrt{5}}{2\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$，$\therefore$ 外接球半径为 $\sqrt{(\frac{\sqrt{10}}{2})^2+1}=\frac{\sqrt{14}}{2}$，$\therefore$ 三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 $4\pi(\frac{\sqrt{14}}{2})^2=14\pi$.



12. B 【解析】由 $ae^{x_1}=x_1$，$ae^{x_2}=x_2$，可得 $\frac{x_2}{x_1}=e^{x_2-x_1}$

$\geqslant 3$. 设 $t=x_2-x_1$，则 $t\geqslant \ln 3$，$\therefore t=x_1e^t-x_1$，$\therefore x_1=\frac{t}{e^t-1}$，设 $g(t)=\frac{t}{e^t-1}(t\geqslant \ln 3)$，$g'(t)=\frac{e^t-1-te^t}{(e^t-1)^2}$，设 $h(t)=e^t-1-te^t$，则 $h'(t)=-te^t<0$，$\therefore h(t)\leqslant h(\ln 3)=2-3\ln 3<0$，$\therefore g(t)$ 为减函数，$\therefore g(t)\leqslant \frac{1}{2}\ln 3$，即 $x_1\leqslant \frac{1}{2}\ln 3$，由 $a=\frac{x_1}{e^{x_1}}$，设 $s(x)=\frac{x}{e^x}(x\leqslant \frac{1}{2}\ln 3)$，$s'(x)=\frac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\frac{1-x}{e^x}>0$，$\therefore s(x)=\frac{x}{e^x}(x\leqslant \frac{1}{2}\ln 3)$ 为增函数，$\therefore a\leqslant \frac{\frac{1}{2}\ln 3}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}\ln 3$，$\therefore$ 实数 a 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}\ln 3$.

13. 0.384 【解析】$C_3^2\times(0.8)^2\times(1-0.8)=0.384$.

14. $\frac{8}{5}$ 【解析】根据等差数列性质，可设 $S_n=kn\cdot(7n+1)=(7n^2+n)k(k\in\mathbf{R}$，且 $k\neq 0)$，则 $T_n=(4n^2+5n)k$. $\therefore a_5=S_5-S_4=64k$，$b_3=T_3-T_2=25k$，$\therefore \sqrt{\frac{a_5}{b_3}}=\sqrt{\frac{64}{25}}=\frac{8}{5}$.

15. 30 【解析】由 $\frac{3}{2}=(\frac{9}{4})^{\alpha}$，得 $\alpha=\frac{1}{2}$，$\therefore f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，$\therefore g(x)=(x-2)^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}$. $\therefore m-\frac{3}{2}=(n-2)^{\frac{1}{2}}$，即 $(m-\frac{3}{2})^2=n-2$，$\therefore |MT_n|=\sqrt{(n-\frac{9}{4})^2+(m-\frac{3}{2})^2}=\sqrt{(n-\frac{9}{4})^2+n-2}=\sqrt{n^2-\frac{7}{2}n+\frac{49}{16}}=\sqrt{(n-\frac{7}{4})^2}=|n-\frac{7}{4}|(n\geqslant 2)$，$\therefore |MT_2|+|MT_3|+\cdots+|MT_9|=(2-\frac{7}{4})+(3-\frac{7}{4})+\cdots+(9-\frac{7}{4})=30$.

16. 1 【解析】设 $\triangle PF_1F_2$ 内切圆与 $\triangle PF_1F_2$ 的三边 PF_1、PF_2、F_1F_2 的切点分别为 D、N、M，根据圆的切线性质，可得 $|F_1M|-|F_2M|=2a=4$，又因为 $|F_1M|+|F_2M|=|F_1F_2|=2\sqrt{5}$，$\therefore |F_1M|=\sqrt{5}+2$，即 $|OM|=2$. $\therefore$ 内切圆圆心 I 在直线 $x=2$ 上. 又因为圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 的圆心为 $(0,1)$，半径 $r=1$，$\therefore$ 圆心 I 到圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 上任意一点的距离的最小值为 $2-1=1$.

17.【解析】(1) $\because \sin(A+B)=\sin C=6\sin^2\frac{C}{2}=6\cdot\frac{1-\cos C}{2}=3-3\cos C$， ………………………… 1 分

$\therefore (3-3\cos C)^2+\cos^2 C=1$，

$\therefore 5\cos^2 C-9\cos C+4=0$，

解得 $\cos C=\frac{4}{5}$，或 $\cos C=1$（舍）， ………… 3 分

$\because b=2$，

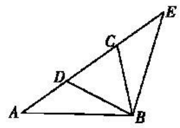
$\therefore \angle B=\angle C$，

$\therefore \sin A=\sin(\pi-2C)=\sin 2C=2\sin C\cos C=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$. ………………………………………… 5 分

(2) 设 a、b 边上的高分别为 h_1、h_2，则 $\frac{h_1}{h_2}=2$.

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\cdot h_1=\frac{1}{2}b\cdot h_2$，

$\therefore b=2a$ …………… 6 分



设 D 为 AC 的中点，
则 $AD=DC=a$，
延长线段 AC 到点 E，
使 $CE=a$，连接 BE.

易证 $\angle DBE=\frac{\pi}{2}$，$\therefore \triangle DBE$ 为直角三角形.

设 $\angle ADB=\alpha$，

在 $\triangle ADB$ 中，$\cos\alpha=\frac{a^2+BD^2-4}{2a\times BD}$，

在 $\triangle CDB$ 中，$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=\frac{a^2+BD^2-a^2}{2a\times BD}$，$\therefore BD^2=2-\frac{1}{2}a^2$，

$\therefore BE^2=4a^2-BD^2=\frac{9}{2}a^2-2$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DBE}=\frac{1}{2}BD\times BE=\frac{1}{2}\sqrt{(2-\frac{1}{2}a^2)(\frac{9}{2}a^2-2)}$， …………………… 8 分

由 $\begin{cases}2a+a>2\\a+2>2a\\2a+2>a\end{cases}$，得 $\frac{2}{3}<a<2$， …………………… 9 分

设 $x=\frac{1}{2}a^2$，则 $x\in(\frac{2}{9},2)$，

$f(x)=(2-x)(9x-2)=-9x^2+20x-4$，

当 $x=-\frac{20}{2\times(-9)}=\frac{10}{9}$ 时，$f(x)_{\max}=f(\frac{10}{9})=\frac{64}{9}$，
………………………………………… 11 分

$\therefore (S_{\triangle ABC})_{\max}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{64}{9}}=\frac{4}{3}$. ……………… 12 分

18.【解析】(1) 证明：在图①中连接 BE，由平面几何知识，可求得 $AE=2$，$BE=2\sqrt{3}$，

又 $\because AB=4$，$\therefore BE\perp AE$. …………………… 2 分

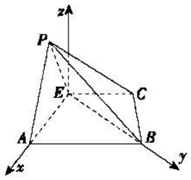
在图②中，∵平面 $APE\perp$ 平面 $ABCE$，且平面 $APE\cap$ 平面 $ABCE=AE$，

∴$BE\perp$ 平面 PAE，………………………… 4分

又∵$BE\subset$ 平面 PBE，

∴平面 $PAE\perp$ 平面 PBE. ………………… 6分

(2)以 E 为坐标原点，EA 为 x 轴，EB 为 y 轴，过点 E 垂直于平面 $ABCE$ 的直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $E(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(0,2\sqrt{3},0)$，$C(-1,\sqrt{3},0)$，$P(1,0,\sqrt{3})$，……………………………………………… 7分

∴$\overrightarrow{PB}=(-1,2\sqrt{3},-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{EP}=(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{EC}=(-1,\sqrt{3},0)$，

设平面 PCE 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

∴$\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0\\-x+\sqrt{3}y=0\end{cases}$，令 $x=\sqrt{3}$，

可得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,-1)$，………………………… 9分

∴$\cos\langle\overrightarrow{PB},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times4}=\dfrac{\sqrt{15}}{10}$，…………… 11分

∴直线 PB 与平面 PCE 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{15}}{10}$.
……………………………………………… 12分

19.【解析】(1)由频率分布直方图可知，射中门框内的区域1时，进球数为 $1000\times0.12\times0.6=72$，
同理可求得区域 2－9 的进球数分别为：63，91，91，81，81，81，70，70. ………………… 2分

∴各区域进球数的平均数 $=\dfrac{72+63+91+91+81+81+81+70+70}{9}\approx77.78$.
……………………………………………… 4分

中位数为81. ……………………………… 5分

(2)由(1)可知该队员这1000次点球练习的进球数：

$72+63+91+91+81+81+81+70+70=700$，

∴他在比赛中射点球时进球的概率 $p=0.7$. …
……………………………………………… 7分

进球数 X 为一个随机变量，可能取值为 0，1，2，3. 且 $X\sim B(3,0.7)$. ……………………… 9分

∴$P(X=0)=C_3^0\times0.7^0\times(1-0.7)^3=0.027$，

$P(X=1)=C_3^1\times0.7^1\times(1-0.7)^2=0.189$，

$P(X=2)=C_3^2\times0.7^2\times(1-0.7)^1=0.441$，

$P(X=3)=C_3^3\times0.7^3\times(1-0.7)^0=0.343$.

∴随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	0.027	0.189	0.441	0.343

……………………………………………… 11分

∴$E(X)=np=2.1$. ………………………… 12分

20.【解析】(1)在△ABC 中，∵$\sin A+\sin B=2\sin C$，
根据正弦定理，可得 $|CB|+|CA|=2|AB|=4>|AB|=2$，………………………………… 2分

由椭圆定义，可知顶点 C 的轨迹为中心在原点，以 A、B 为焦点的椭圆(不包括与 x 轴交点). ……
……………………………………………… 3分

∴$2a=4$，$2c=2$，∴$b^2=a^2-c^2=3$，

∴轨迹方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1(x\neq\pm2)$. ……… 5分

(2)设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}y=kx+b\\\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，得 $(4k^2+3)x^2+8kbx+4b^2-12=0$，

∴$\begin{cases}\Delta=48(4k^2+3-b^2)\\x_1+x_2=\dfrac{-8kb}{4k^2+3}\\x_1\cdot x_2=\dfrac{4b^2-12}{4k^2+3}\end{cases}$，…………………… 6分

∴$x_P=\dfrac{-4kb}{4k^2+3}$，$y_P=\dfrac{3b}{4k^2+3}$，……………… 7分

∵点 P 落在直线 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 上，

∴$\dfrac{3b}{4k^2+3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，∴$4k^2+3=-2\sqrt{3}b$，…… 9分

∴$x_P=\dfrac{2\sqrt{3}k}{3}$，∴$P(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}k,-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，……… 10分

∴线段 MN 的垂直平分线方程为 $y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1}{k}(x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}k)$，即 $y=-\dfrac{1}{k}x+\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，…… 11分

∴线段 MN 的垂直平分线恒过定点$(0,\dfrac{\sqrt{3}}{6})$. …
……………………………………………… 12分

21.【解析】(1)由已知，可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\ln x+1-2ax$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点，
……………………………………………… 1分

设 $h(x)=\ln x+1-2ax$，

$\therefore h'(x)=\frac{1-2ax}{x}(x>0)$,

当 $a\leqslant 0$ 时,$h'(x)>0$,$f'(x)$ 为增函数,不存在两个零点;……………………………………………… 2 分

当 $a>0$ 时,$h'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{2a}$,

$x\in(0,\frac{1}{2a})$ 时,$h'(x)>0$,$f'(x)$ 为增函数,

$x\in(\frac{1}{2a},+\infty)$ 时,$h'(x)<0$,$f'(x)$ 为减函数. ……………………………………………… 4 分

$\therefore f'(\frac{1}{2a})=-\ln 2a>0$,

$\therefore 0<a<\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(0,\frac{1}{2})$. …………… 5 分

(2)证明:$\because g(x)=ax(x-2)-\frac{f(x)}{x}=ax^2-ax-\ln x(x>0)$,

$\therefore g'(x)=2ax-a-\frac{1}{x}=\frac{2ax^2-ax-1}{x}$, …… 6 分

由已知得:$x_1+x_2=\frac{1}{2}$,$\because x_1<x_2$,$\therefore x_2>\frac{1}{4}$,

又 $\because g'(x_2)=2ax_2^2-ax_2-1=0$,

$\therefore a=\frac{1}{2x_2^2-x_2}<0$,

解得 $0<x_2<\frac{1}{2}$,

$\therefore \frac{1}{4}<x_2<\frac{1}{2}$, ……………………………… 8 分

设 $F(x)=\ln x-x+1(x>0)$,

则 $F'(x)=\frac{1-x}{x}$,

当 $x\in(0,1)$ 时,$F'(x)>0$,$F(x)$ 为增函数,

当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$F'(x)<0$,$F(x)$ 为减函数,

$\therefore F(x)\leqslant F(1)=0$,

$\therefore \ln x\leqslant x-1$, ……………………………… 9 分

$\therefore g(x_2)=ax_2^2-ax_2-\ln x_2\geqslant ax_2^2-ax_2-x_2+1$

$=\frac{x_2(x_2-1)}{2x_2^2-x_2}-(x_2-1)=1+\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-x_2}+(\frac{1}{2}-x_2)$,

令 $t=\frac{1}{2}-x_2$,则 $t\in(0,\frac{1}{4})$,

$\because y=\frac{1}{4t}+t$ 在 $t\in(0,\frac{1}{4})$ 时单调递减,

$\therefore y>\frac{1}{4\times\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$, …………………… 11 分

$\therefore g(x_2)>1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$ 成立. …………… 12 分

22.【解析】(1)消去参数,得到曲线 C_1 的普通方程为 $y^2=4x$, ……………………………………… 2 分

曲线 C_2 的普通方程为 $y=\sqrt{3}(x-a)$. …… 4 分

(2)由 $y^2=4x$,得 $\sin^2\theta\cdot t^2-4\cos\theta\cdot t-4a=0$,

设 $|PA|=|t_1|$,$|PB|=|t_2|$.

$\therefore t_1+t_2=\frac{4\cos\theta}{\sin^2\theta}$,$t_1\cdot t_2=\frac{-4a}{\sin^2\theta}$. …………… 5 分

$\therefore \frac{1}{|PA|^2}+\frac{1}{|PB|^2}=\frac{1}{t_1^2}+\frac{1}{t_2^2}=\frac{(t_1+t_2)^2-2t_1\cdot t_2}{(t_1\cdot t_2)^2}$

$=\frac{16\cos^2\theta+8a\sin^2\theta}{16a^2}$, ………………………… 7 分

当 $a=2$ 时,$\frac{1}{|PA|^2}+\frac{1}{|PB|^2}=\frac{1}{4}$ 为定值,与曲线 C_2 的倾斜角 θ 无关. ………………………… 9 分

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(2,0)$. …………………… 10 分

23.【解析】(1)$\because x\in[\frac{1}{2},2]$,

$\therefore f(x)=\frac{a}{x}-x+2$,

由 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立,

得 $\frac{a}{x}-x+2\geqslant 0$,

$\therefore a\geqslant x^2-2x$ 恒成立. ……………………… 2 分

设 $y=x^2-2x$,

$x\in[\frac{1}{2},2]$,

$\therefore y_{max}=0$,$a\geqslant 0$,

$\therefore a$ 的取值范围是 $[0,+\infty)$. ……………… 5 分

(2)当 $x\in[-2,0)$ 时,$f(x)=\frac{3}{-4|x|}-|x|+2=\frac{3}{4x}+x+2$, ……………………………………… 6 分

$\because \frac{3}{-4x}+(-x)\geqslant 2\sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$,当且仅当 $\frac{3}{-4x}=-x$,即 $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取"="号. ……………… 8 分

又 $\because -\frac{\sqrt{3}}{2}\in[-2,0)$,$\therefore \frac{3}{4x}+x\leqslant-\sqrt{3}$,

$\therefore \frac{3}{4x}+x+2\leqslant 2-\sqrt{3}$,

$\therefore$ 当 $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,函数 $f(x)$ 在 $x\in[-2,0)$ 上的最大值为 $2-\sqrt{3}$. ……………………………… 10 分

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国强基计划、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国中学大联考 2020 届高三下学期模考试题及答案汇总（更新下载中），点击链接获得

http://www.zizzs.com/c/202002/42364.html