

北京市第十三中学 2019~2020 学年度

高三年级数学开学测试 2020 年 2 月

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，第 I 卷从第 1 页至第 2 页；第 II 卷从第 3 页至第 5 页；答题纸从第 1 页至第 4 页。共 150 分，考试时间 120 分钟。请在答题纸规定处书写班级、姓名、准考证号。考试结束后，将本试卷的答题纸一并交回。

第 I 卷（选择题 共 40 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。）

- 1、设集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | x > 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | x^2 \leq 4\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$
 (A) $[-2, +\infty)$ (B) $(1, +\infty)$ (C) $(1, 2]$ (D) $(-\infty, +\infty)$
- 2、抛物线 $x^2 = 4y$ 上的点到其焦点的最短距离为 ()
 (A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$
- 3、过双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的右焦点，且平行于经过一、三象限的渐近线的直线方程是 ()
 (A) $3x + 4y - 15 = 0$ (B) $4x - 3y - 20 = 0$
 (C) $4x - 3y + 20 = 0$ (D) $3x - 4y - 15 = 0$
- 4、已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, 且 $a_1, a_2, 6$ 成等差数列，则 $a_4 = (\quad)$
 (A) 6 (B) 8 (C) 16 (D) 32
- 5、已知向量 $a = (1, 2), b = (0, -2), c = (-1, \lambda)$, 若 $(2a - b) \parallel c$, 则实数 $\lambda = (\quad)$
 (A) -3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) 1 (D) 3
- 6、已知 $\omega > 0$, $0 < \varphi < \pi$, 直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 和 $x = \frac{5\pi}{4}$ 是函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 图像的两条相邻的对称轴，则 $\varphi = (\quad)$

- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

7、已知 $a = 2^{\frac{1}{3}}$, $b = \log_2 \frac{1}{3}$, $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$, 则 ()

- (A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $c > b > a$ (D) $c > a > b$

8、已知函数 $f(x) = \sqrt{x} + \frac{a}{x}$, 则“ $a < 0$ ”是“函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上存在零点”的 ()

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

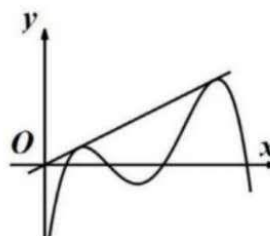
9、某购物网站在 2019 年 11 月开展“全场 6 折”促销活动, 在 11 日当天购物还可以再享受“每张订单金额 (6 折后) 满 300 元时可减免 100 元”。某人在 11 日当天欲购入原价 48 元 (单价) 的商品共 42 件, 为使花钱总数最少, 他最少需要下的订单张数为 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

10、如图, 已知直线 $y = kx$ 与曲线 $y = f(x)$ 相切于两点, 函数 $g(x) = kx + m (m > 0)$,

则函数 $F(x) = g(x) - f(x)$ ()

- (A) 有极小值, 没有极大值
(B) 有极大值, 没有极小值
(C) 至少有两个极小值和一个极大值
(D) 至少有一个极小值和两个极大值



第 II 卷 (共 110 分)

二、填空题 (每小题 5 分, 共 25 分)

11、已知 $\frac{ai}{1-i} = -1+i$, 其中 i 是虚数单位, 那么实数 $a =$ _____.

12、若 $\tan \alpha = 2$, 则 $\sin 2\alpha =$ _____.

13、对于 $\odot A: x^2 + y^2 - 2x = 0$, 以点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 为中点的弦所在的直线方程是 _____.

14、已知 $m, 4, n$ 是等差数列, 那么 $(\sqrt{2})^m \cdot (\sqrt{2})^n =$ _____; mn 的最大值为 _____.

15、已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}. \\ 0, & x \in \mathbf{C}_R \mathbf{Q}. \end{cases}$ 则 $f(f(x)) =$ _____;

下面三个命题中, 所有真命题的序号是 _____.

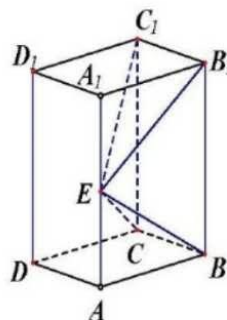
- ① 函数 $f(x)$ 是偶函数;
- ② 任取一个不为零的有理数 T , $f(x+T) = f(x)$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立;
- ③ 不存在三个点 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)), C(x_3, f(x_3))$, 使得 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

三、解答题 (共 85 分)

16、(本小题满分 14 分)

如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形, 点 E 在棱 AA_1 上, $BE \perp EC_1$.

- (I) 证明: $BE \perp$ 平面 EB_1C_1 ;
- (II) 若 $AE = A_1E$, 求二面角 $B-EC-C_1$ 的正弦值.



17、(本小题满分 14 分)

已知 $\triangle ABC$ 同时满足下列四个条件中的三个:

- ① $A = \frac{\pi}{3}$; ② $\cos B = -\frac{2}{3}$; ③ $a = 7$; ④ $b = 3$.

- (I) 请指出这三个条件, 并说明理由;
- (II) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18、（本小题满分 14 分）

为了解甲、乙两个快递公司的工作状况，假设同一个公司快递员的工作状况基本相同，现从甲、乙两公司各随机抽取一名快递员，并从两人某月（30 天）的快递件数记录结果中随机抽取 10 天的数据，制表如下：

甲公司某员工 A								乙公司某员工 B						
3	9	6	5	8	3	3	2	3	4	6	6	6	7	7
						0	1	4	4	2	2	2		

每名快递员完成一件货物投递可获得的劳务费情况如下：

甲公司规定每件 4.5 元；乙公司规定每天 35 件以内（含 35 件）的部分每件 4 元，超出 35 件的部分每件 7 元。

- (I) 根据表中数据写出甲公司员工 A 在这 10 天投递的快递件数的平均数和众数；
 (II) 为了解乙公司员工 B 的每天所得劳务费的情况，从这 10 天中随机抽取 1 天，他所得的劳务费记为 X （单位：元），求 X 的分布列和数学期望；
 (III) 根据表中数据估算两公司的每位员工在该月所得的劳务费。

19、（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x) = x \cdot \ln x$ 。

- (I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；
 (II) 求 $f(x)$ 的单调区间；
 (III) 若对于任意 $x \in [\frac{1}{e}, e]$ ，都有 $f(x) \leq ax - 1$ ，求实数 a 的取值范围。

20、（本小题满分 14 分）

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{2} = 1 (a > \sqrt{2})$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，左、右顶点分别为 A, B ，点 M 是椭圆 C 上异于 A, B 的一点，直线 AM 与 y 轴交于点 P 。

- (I) 若点 P 在椭圆 C 的内部，求直线 AM 的斜率的取值范围；
 (II) 设椭圆 C 的右焦点为 F ，点 Q 在 y 轴上，且 $\angle PFQ = 90^\circ$ ，求证： $AQ \parallel BM$ 。

21、(本小题满分 14 分)

对于数列 $A_n: a_1, a_2, \dots, a_n (a_i \in \mathbf{N}, i=1, 2, \dots, n)$, 定义“ T 变换”: T 将数列 A_n 变换成数列 $B_n: b_1, b_2, \dots, b_n$, 其中 $b_i = |a_i - a_{i+1}| (i=1, 2, \dots, n-1)$, 且 $b_n = |a_n - a_1|$, 这种“ T 变换”记作 $B_n = T(A_n)$. 继续对数列 B_n 进行“ T 变换”, 得到数列 C_n, \dots , 依此类推, 当得到的数列各项均为 0 时变换结束.

- (I) 试问 $A_3: 4, 2, 8$ 和 $A_4: 1, 4, 2, 9$ 经过不断的“ T 变换”能否结束? 若能, 请依次写出经过“ T 变换”得到的各数列; 若不能, 说明理由;
- (II) 求 $A_3: a_1, a_2, a_3$ 经过有限次“ T 变换”后能够结束的充要条件;
- (III) 证明: $A_4: a_1, a_2, a_3, a_4$ 一定能经过有限次“ T 变换”后结束.

自主招生在线创始于 2014 年, 致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站(www.zizzs.com)和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



识别二维码, 快速关注