



炎德·英才大联考雅礼中学 2023 届高三三月考试卷(六)

数 学

命题人:刘一波 审题人:张 塗

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 10 页,时量 120 分钟,满分 150 分.

第 I 卷

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 若复数 $(2+ai)(1-i)$ 的实部和虚部相等,则实数 a 的值为 (B)
A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
2. 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 4 \leq 0$ ”的否定为 (C)
A. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 4 \geq 4$ B. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x - 4 \leq 4$
C. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 4 > 0$ D. $\exists x \notin \mathbf{R}, x^2 - 2x + 4 > 0$
3. 已知向量 $a = (k, 3), b = (1, 4), c = (2, 1)$, 且 $(2a - 3b) \perp c$, 则实数 $k =$ (C)
A. $-\frac{9}{2}$ B. 0 C. 3 D. $\frac{15}{2}$
4. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $1 < b < a$ ”是“ $a - 1 > |b - 1|$ ”的 (B)
A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【解析】因为 $a - 1 > |b - 1| \Leftrightarrow 1 - a < b - 1 < a - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < a + b, \\ b < a, \end{cases}$

所以当 $1 < b < a$ 时, $a - 1 > |b - 1|$ 成立,

当 $a - 1 > |b - 1|$ 成立时, 如取 $b = \frac{1}{2}, a = 2$, 此时 $1 < b < a$ 不成立,

所以“ $1 < b < a$ ”是“ $a - 1 > |b - 1|$ ”的充分不必要条件. 故选 B.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = \sqrt{5}, BC = \sqrt{10}, \cos A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 (A)
A. $\frac{5}{2}$ B. 5 C. 10 D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

【解析】由 $AC = \sqrt{5}, BC = \sqrt{10}, BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$, 得 $AB^2 - 4AB - 5 = 0$, 解得 $AB = 5$, 而 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 5 \times \sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{5}{2}$. 故选 A.

6. 将标号为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的 6 张卡片放入 3 个不同的信封中, 若每个信封放 2 张, 其中标号为 1, 2 的卡片放入同一信封, 则不同的方法共有 (B)
A. 12 种 B. 18 种 C. 36 种 D. 54 种

【解析】标号 1, 2 的卡片放入同一封信有 $C_3^1 = 3$ 种方法, 其他四张卡片放入两个信封, 每个信封两张



卡片有 $\frac{C_4^2}{A_2^2} \cdot A_2^3 = 6$ 种方法, 共有 $3 \times 6 = 18$ 种. 故选 B.

7. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , O 为坐标原点, 以 $F_1 F_2$ 为直径的圆与双曲线的右支交于 P 点, 且以 OF_2 为直径的圆与直线 PF_1 相切, 若 $|PF_1| = 8$, 则双曲线的焦距等于 (A)

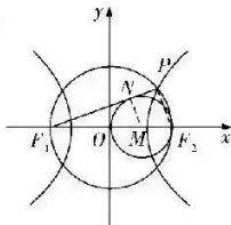
- A. $6\sqrt{2}$ B. 6 C. $3\sqrt{2}$ D. 3

【解析】如图, 不妨设点 P 在第一象限, 连接 PF_2 , 依题意知 $PF_1 \perp PF_2$, 设以 OF_2 为直径的圆与直线 PF_1 相切于点 N , 圆心为 M , 连接 NM , 则 $NM \perp PF_1$,

因此 $Rt\triangle PF_1 F_2 \sim Rt\triangle NF_1 M$, 故 $\frac{|NM|}{|PF_2|} = \frac{|F_1 M|}{|F_1 F_2|}$, 则 $\frac{\frac{c}{2}}{|PF_2|} = \frac{\frac{3c}{2}}{2c}$, 解得

$$|PF_2| = \frac{2c}{3}, \text{ 由勾股定理可得 } |PF_1| = \sqrt{|F_1 F_2|^2 - |PF_2|^2} = \sqrt{(2c)^2 - \left(\frac{2c}{3}\right)^2} =$$

$\frac{4\sqrt{2}c}{3}$, 所以 $\frac{4\sqrt{2}c}{3} = 8$, 得 $c = 3\sqrt{2}$, 故双曲线的焦距为 $6\sqrt{2}$. 故选 A.



8. 已知 m, n 为实数, $f(x) = e^x - mx - n - 1$, 若 $f(x) \geq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 $\frac{n}{m}$ 的最小值是 (B)

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

【解析】 $f(x) = e^x - mx - n - 1$, $f'(x) = e^x - m$,

当 $m \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 单调递增, $f(x) \geq 0$ 不恒成立,

当 $m > 0$ 时, $x \in (-\infty, \ln m)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减; $x \in (\ln m, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

$$\therefore f(x)_{\min} = f(\ln m) = m - m \ln m + n - 1,$$

$$\because f(x) \geq 0 \text{ 恒成立}, \therefore m - m \ln m + n - 1 \geq 0,$$

$$\therefore n \geq m \ln m - m + 1,$$

$$\therefore \frac{n}{m} \geq \frac{m \ln m - m + 1}{m} = \ln m + \frac{1}{m} - 1,$$

$$\text{令 } h(m) = \ln m + \frac{1}{m} - 1, m > 0,$$

$$h'(m) = \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} = \frac{m-1}{m^2}, h(m) \text{ 在区间 } (0, 1) \text{ 上单调递减, 在区间 } (1, +\infty) \text{ 上单调递增,}$$

$$\therefore h(m)_{\min} = h(1) = 0. \text{ 故选 B.}$$

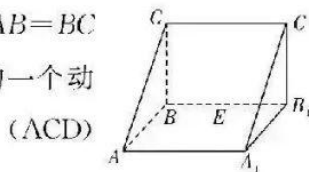
二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知 a, b, c 满足 $c < b < a$ 且 $ac < 0$, 则下列不等式恒成立的是 (ABD)

- A. $\frac{b}{a} > \frac{c}{a}$ B. $\frac{b-a}{c} > 0$ C. $\frac{b^2}{c} > \frac{a^2}{c}$ D. $\frac{a-c}{ac} < 0$



10. 如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 ABC , $AA_1=2$, $AB=BC=1$, $\angle ABC=90^\circ$,三棱柱外接球的球心为 O ,点 E 是侧棱 BB_1 上的一个动点,下列判断正确的是



- (ACD)
- A. 直线 AC 与直线 C_1E 是异面直线
B. A_1E 一定不垂直于 AC_1
C. 三棱锥 $E-AA_1O$ 的体积为定值
D. $AE+EC_1$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$

【解析】对于 A, 因为点 $A \notin$ 平面 BB_1C_1C , 点 $C \in C_1E$, 所以直线 AC 与直线 C_1E 是异面直线, 故 A 正确;

对于 B, $A_1E \perp AB_1$ 时, 直线 $A_1E \perp$ 平面 AB_1C_1 , 所以 $A_1E \perp AC_1$, 故 B 错误;

对于 C, 球心 O 是直线 AC_1, A_1C 的交点, 底面 OAA_1 面积不变, 直线 $BB_1 \parallel$ 平面 AA_1O , 所以点 E 到底面距离不变, 体积为定值, 故 C 正确;

对于 D, 将矩形 AA_1B_1B 和矩形 BB_1C_1C 展开到一个平面内, 当点 E 为 AC_1 与 BB_1 交点时, $AE+EC_1$ 取得最小值 $2\sqrt{2}$, 故 D 正确. 故选 ACD.

11. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在导函数 $f'(x)$, 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 有 $f(x)+f(-x)=x^2$, 且在 $[0, +\infty)$ 上 $f'(x) > x$, 若 $f(2-a)+2a > f(a)+2$, 则实数 a 的可能取值为

- (AB)
- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

【解析】 $f(x)+f(-x)=x^2 \Leftrightarrow f(x)-\frac{x^2}{2}+f(-x)-\frac{(-x)^2}{2}=0$, 令 $g(x)=f(x)-\frac{x^2}{2} \Rightarrow g(x)$ 为奇函数, $x \geq 0$ 时, $g'(x)=f'(x)-x > 0$, $\therefore g(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

由奇函数性质知 $y=g(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

原不等式可以变形为 $f(2-a)-\frac{(2-a)^2}{2} > f(a)-\frac{a^2}{2} \Rightarrow 2-a > a \Rightarrow a < 1$, 故选 AB.

12. 已知直线 $l: \cos \theta \cdot x + \sin \theta \cdot y + 3\sin \theta + \cos \theta - 5 = 0$, 则下列说法正确的是

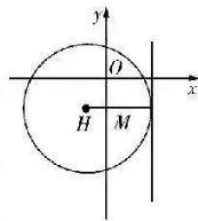
- (ABD)
- A. 直线 l 一定不过原点
B. 存在定点 P , 使得点 P 到直线 l 的距离为定值
C. 点 $M(0, -3)$ 到直线 l 的最小值为 $2\sqrt{6}-3$
D. 若直线 l 分别与 x 轴, y 轴交于 A, B 两点, 则 $\triangle AOB$ 的周长可以等于 12

【解析】取 $x=0, y=0$, 即 $3\sin \theta + \cos \theta - 5 = 0$ 无解, A 项正确; 令点 $P(x_0, y_0)$,

$$d = \frac{|\cos \theta \cdot x_0 + \sin \theta \cdot y_0 + 3\sin \theta + \cos \theta - 5|}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}}, \text{ 令 } x_0 = -1, y_0 = -3, d = \frac{5}{1} = 5$$

为定值, B 项正确; 由 B 可知直线 l 为圆 $H: (x+1)^2 + (y+3)^2 = 25$ 的切线, $d_{\min} =$

$|R - MH| = 4$, C 项错误; 在圆 H 上取一点 $(3, 0)$ 作切线, 记为 $l: (3+1)(x+1) + (0+3)(y+3) = 25$, $l: 4x + 3y = 12$, $A(3, 0), B(0, 4), C_{\triangle AOB} = 12$, D 项正确. 故选 ABD.





答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	C	B	A	B	A	B	ABD	ACD	AB	ABD

第Ⅱ卷

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. $(2-x)(1-3x)^4$ 的展开式中, x^2 的系数等于 120. (用数字作答)

14. 点 $M(3,2)$ 到抛物线 $C: y=ax^2 (a>0)$ 准线的距离为4, 则实数 $a=$ $\frac{1}{8}$.

【解析】∵点 $M(3,2)$ 到抛物线 $C: y=ax^2 (a>0)$ 准线的距离为4, ∴ $2 + \frac{1}{4a} = 4$, ∴ $a = \frac{1}{8}$.

15. 若正整数 m 满足 $10^{m-1} < 2^{312} < 10^m$, 则 $m=$ 155. ($\lg 2 \approx 0.3010$)

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=3$, $\sin B=m \cdot \sin A (m \geq 2)$, 则 $\triangle ABC$ 的面积最大值为 3.

【解析】由正弦定理: $\sin B=m \cdot \sin A \Leftrightarrow b=m \cdot a$, 以线段 AB 所在直线为 x 轴, 以 AB 的中点 O 为坐标原点建立平面直角坐标系, 则 $A(-\frac{3}{2}, 0)$, $B(\frac{3}{2}, 0)$, $C(x, y)$, 可以求出点 C 的轨迹方程, 且可化为 $x^2 + y^2 - \frac{3m^2+3}{m^2-1}x - \frac{9}{4} = 0$, 由此可知点 C 的轨迹是以 $(\frac{3m^2+3}{2(m^2-1)}, 0)$ 为圆心, 以 $r = \frac{3m}{m^2-1}$ 为半径的圆. 所以当点 C 在圆上运动时, 点 C 到 x 轴的最大距离为半径 $r = \frac{3m}{m^2-1}$, 所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3m}{m^2-1} = \frac{9}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{m} + m}$ 在 $m \geq 2$ 上单调递减, 所以 $S_{\max} = \frac{9}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{2} + 2} = 3$.

四、解答题:本题共6小题,共70分.请在答题卡指定区域内作答.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分10分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, S_n 为其前 n 项和, 对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 满足关系 $S_n = 2a_n - 2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $b_n = \frac{1}{(\log_2 a_n)^2}$, 求证: 当 $n \geq 4$ 时, 总有 $T_n < \frac{61}{36}$.

【解析】(1) ∵ $S_n = 2a_n - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$, ①

∴ $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2 (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$, ② 1分

①-②, 得 $a_n = 2a_n - 2a_{n-1} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$,

∵ $a_n \neq 0$, ∴ $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2 (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$.

即数列 $\{a_n\}$ 是等比数列. 4分

∵ $a_1 = S_1$, ∴ $a_1 = 2a_1 - 2$, 即 $a_1 = 2$.



$\therefore a_n = 2^n (n \in \mathbb{N}^*)$, 5 分

(2) 证明: $\because$ 对任意正整数 n , 总有 $b_n = \frac{1}{(\log_2 a_n)^2} = \frac{1}{n^2}$, 7 分

$\therefore$ 当 $n \geq 4$ 时, $T_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$
 $= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{61}{36} - \frac{1}{n} < \frac{61}{36}$, 10 分

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \cos^2(x + \frac{\pi}{12})$, $g(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin 2x$.

(1) 设直线 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴, 求 $g(x_0)$ 的值;

(2) 求函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 的单调递增区间.

【解析】(1) 由题设知 $f(x) = \frac{1}{2} [1 + \cos(2x + \frac{\pi}{6})]$.

因为直线 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴, 所以 $2x_0 + \frac{\pi}{6} = k\pi (k \in \mathbb{Z})$,

即 $2x_0 = k\pi - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$.

所以 $g(x_0) = 1 + \frac{1}{2} \sin 2x_0 = 1 + \frac{1}{2} \sin(k\pi - \frac{\pi}{6})$.

当 k 为偶数时, $g(x_0) = 1 - \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{6}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$,

当 k 为奇数时, $g(x_0) = 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ 6 分

(2) $h(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{2} [1 + \cos(2x + \frac{\pi}{6})] + 1 + \frac{1}{2} \sin 2x$
 $= \frac{1}{2} [\cos(2x + \frac{\pi}{6}) + \sin 2x] + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} (\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x) + \frac{3}{2}$
 $= \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{3}) + \frac{3}{2}$.

当 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 即 $k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$ 时,

函数 $h(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{3}) + \frac{3}{2}$ 是增函数,

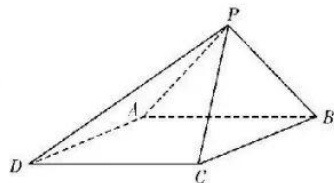
故函数 $h(x)$ 的单调递增区间是 $[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}] (k \in \mathbb{Z})$ 12 分

19. (本小题满分 12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle ABC = 60^\circ$, $PA = PB, PC = 2$.

(1) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 若 $PA = PB$, 求二面角 $A-PC-D$ 的余弦值.





【解析】(1)证明:取 AB 中点 O , 连接 AC, CO, PO ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\therefore AB=BC=2$,

$\because \angle ABC=60^\circ$, $\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形.

$\therefore CO \perp AB, OC=\sqrt{3}$,

$\because PA \perp PB, \therefore PO=\frac{1}{2}AB=1$,

$\because PC=2, \therefore OP^2+OC^2=PC^2, \therefore CO \perp PO$,

$\because AB \cap PO=O, \therefore CO \perp$ 平面 PAB ,

$\because CO \subset$ 平面 $ABCD, \therefore$ 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$ 6 分

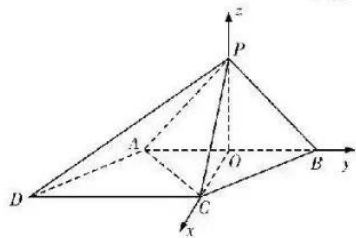
(2) $\because PA=PB, O$ 为 AB 的中点, $\therefore PO \perp AB$.

由(1)知, 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD=AB$,

$\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore$ 直线 OC, OB, OP 两两垂直.

$\therefore$ 以 O 为原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$, 如图,



则 $O(0,0,0), A(0,-1,0), B(0,1,0), C(\sqrt{3},0,0), D(\sqrt{3},-2,0), P(0,0,1)$.

$\therefore \vec{AP}=(0,1,1), \vec{PC}=(\sqrt{3},0,-1), \vec{DC}=(0,2,0)$.

设平面 APC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

由 $\begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \vec{AP}=0, \\ \boldsymbol{m} \cdot \vec{PC}=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} y+z=0, \\ \sqrt{3}x-z=0, \end{cases}$ 取 $x=1$, 得 $\boldsymbol{m}=(1, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$,

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由 $\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \vec{PC}=0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \vec{DC}=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \sqrt{3}x-z=0, \\ 2y=0, \end{cases}$ 取 $x=1$, 得 $\boldsymbol{n}=(1, 0, \sqrt{3})$,

$\therefore \cos \langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \rangle = \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}| \cdot |\boldsymbol{n}|} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$,

由图可知二面角 $A-PC-D$ 为锐二面角,

$\therefore$ 二面角 $A-PC-D$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ 12 分

20. (本小题满分 12 分)

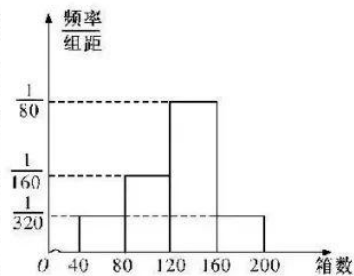
为贯彻中共中央、国务院 2023 年一号文件, 某单位在当地定点帮扶某村种植一种草莓, 并把这种露天种植的草莓搬到了大棚里, 收到了很好的经济效益. 根据资料显示, 产出的草莓的箱数 x (单位: 箱) 与成本 y (单位: 千元) 的关系如下:

x	1	3	4	6	7
y	5	6.5	7	7.5	8

y 与 x 可用回归方程 $\hat{y} = \hat{a} \lg x + \hat{b}$ (其中 $\hat{a}, \hat{b}$ 为常数) 进行模拟.

(1)若农户卖出的该草莓的价格为150元/箱,试预测该水果100箱的利润是多少元.(利润=售价-成本)

(2)据统计,1月份的连续16天中农户每天为甲地可配送的该水果的箱数的频率分布直方图如图,用这16天的情况来估计相应的概率.一个运输户拟购置 n 辆小货车专门运输农户为甲地配送的该水果,一辆货车每天只能运营一趟,每辆车每趟最多只能装载40箱该水果,满载发车,否则不发车.若发车,则每辆车每趟可获利500元;若未发车,则每辆车每天平均亏损200元.试比较 $n=3$ 和 $n=4$ 时,此项业务每天的利润平均值的大小.



参考数据与公式:设 $t=\lg x$,则

$\bar{t}$	$\bar{y}$	$\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2$
0.54	6.8	1.53	0.45

线性回归直线 $\hat{y} = b \lg x - \hat{a}$ 中, $b = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - b \bar{t}$.

【解析】(1)根据题意, $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})^2} = \frac{1.53}{0.45} = 3.4$, 2分

所以 $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{t} = 6.8 - 3.4 \times 0.54 = 4.964$,

所以 $\hat{y} = 3.4t + 4.964$.

又 $t = \lg x$,所以 $\hat{y} = 3.4 \lg x + 4.964$ 4分

所以 $x=100$ 时, $\hat{y} = 6.8 + 4.964 = 11.764$ (千元),

即该水果100箱的成本为11764元,

故该水果100箱的利润 $15000 - 11764 = 3236$ (元). 6分

(2)根据频率分布直方图,可知该农户每天可配送的该水果的箱数的概率分布表为:

箱数	$[40, 80)$	$[80, 120)$	$[120, 160)$	$[160, 200]$
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

设该运输户购3辆车和购4辆车时每天的利润分别为 Y_1, Y_2 元.

则 Y_1 的可能取值为1500, 800, 100,其分布列为:

Y_1	1500	800	100
P	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



故 $E(Y_1) = \frac{5}{8} \times 1500 + \frac{1}{4} \times 800 + \frac{1}{8} \times 100 = 1150$ 9 分

Y_2 的可能取值为 2000, 1300, 600, -100, 其分布列为:

Y_2	2000	1300	600	-100
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

故 $E(Y_2) = \frac{1}{8} \times 2000 + \frac{1}{2} \times 1300 + \frac{1}{4} \times 600 + \frac{1}{8} \times (-100) = 1037.5$ 11 分

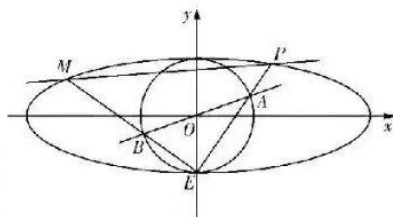
即购置 3 辆小货车的利润平均值大于购置 4 辆小货车的利润平均值. 12 分

21. (本小题满分 12 分)

如图, 椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 = b^2$, 已知

圆 C_2 将椭圆 C_1 的长轴三等分, 椭圆 C_1 右焦点到右顶点的距离为 $3 - 2\sqrt{2}$, 椭圆 C_1 的下顶点为 E , 过坐标原点 O 且与坐标

轴不重合的任意直线 l 与圆 C_2 相交于点 A, B .



(1) 求椭圆 C_1 的方程;

(2) 若直线 EA, EB 分别与椭圆 C_1 相交于另一个交点为点 P, M , 求证: 直线 PM 经过定点.

【解析】(1) 依题意, $2b = \frac{1}{3} \cdot 2a$, 则 $a = 3b$,

$\therefore c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{2}b$, 又 $a - c = 3 - 2\sqrt{2}$, $\therefore b = 1$, 则 $a = 3$,

$\therefore$ 椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 5 分

(2) 由题意知直线 PE, ME 的斜率存在且不为 0, 设直线 PE 的斜率为 k , 则直线 $PE: y = kx - 1$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx - 1, \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = \frac{18k}{9k^2 + 1}, \\ y = \frac{9k^2 - 1}{9k^2 + 1} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 0, \\ y = -1. \end{cases}$$

$\therefore P(\frac{18k}{9k^2 + 1}, \frac{9k^2 - 1}{9k^2 + 1})$, 8 分

$\because AB$ 为圆 C_2 的直径, 点 E 在圆 C_2 上,

$\therefore BE \perp AE$, 即 $k_{AE} \cdot k_{BE} = -1$,

$\therefore k_{BE} = -\frac{1}{k_{AE}} = -\frac{1}{k}$, 则直线 $ME: y = -\frac{1}{k}x - 1$,

故用 $-\frac{1}{k}$ 去替代 k , 得 $M(\frac{-18k}{k^2 + 9}, \frac{9 - k^2}{k^2 + 9})$,



$$k_{PM} = \frac{\frac{9k^2-1}{9k^2-1} - \frac{9-k^2}{k^2+9}}{\frac{18k}{9k^2-1} + \frac{18k}{k^2+9}} = \frac{k^2-1}{10k},$$

$$\therefore \text{直线 } PM: y - \frac{9-k^2}{k^2+9} = \frac{k^2-1}{10k} \left(x + \frac{18k}{k^2+9} \right), \text{ 即 } y = \frac{k^2-1}{10k}x + \frac{4}{5},$$

$$\therefore \text{直线 } PM \text{ 经过定点 } T\left(0, \frac{4}{5}\right). \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - ax, g(x) = \ln x$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求证: $f(x) \geq x \cdot g(x)$;

(2) 设 $r(x) = f(x) + g\left(\frac{1+ax}{2}\right)$, 若对任意的 $a \in (1, 2)$, 总存在 $x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 使不等式 $r(x_0) >$

$k(1-a^2)$ 成立, 求实数 k 的取值范围.

【解析】要证 $f(x) \geq x \cdot g(x) \Leftrightarrow x-1 \geq \ln x$,

令 $h(x) = x-1-\ln x, x \in (0, +\infty)$,

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x},$$

$h(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore h(x) \geq h(1) = 0, \text{ 即 } x-1-\ln x \geq 0,$$

$$\therefore f(x) \geq x \cdot g(x). \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由题意得 } r(x) = x^2 - ax + \ln\left(\frac{1+ax}{2}\right),$$

$$\therefore r'(x) = 2x - a + \frac{a}{1+ax} = \frac{2ax(x - \frac{a^2-2}{2a})}{1+ax},$$

$$\because \frac{a^2-2}{2a} = \frac{a}{2} - \frac{1}{a} < \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$\therefore r(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上为增函数,

$$\therefore x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ 时, } r(x_0)_{\max} = r(1) = 1 - a + \ln \frac{1+a}{2},$$

$$\therefore 1 - a + \ln \frac{1+a}{2} > k(1-a^2),$$

设 $\varphi(a) = 1 - a + \ln \frac{1+a}{2} - k(a^2-1) (a \in (1, 2)), \varphi(1) = 0$, 有 $\varphi(a) > 0$ 在 $a \in (1, 2)$ 时恒成立,

$$\therefore \varphi'(a) = \frac{a}{1+a} [2ka - (1-2k)],$$

① $k=0$ 时, $\therefore \varphi'(a) = \frac{-a}{1+a}, \therefore \varphi(a)$ 在 $a \in (1, 2)$ 时单调递减, 此时 $\varphi(a) < \varphi(1) = 0$ 不符合;



② $k < 0$ 时, $\because \varphi'(a) = \frac{2ka}{1+a} \left[a - \left(\frac{1}{2k} - 1 \right) \right]$, $\therefore \varphi(a)$ 在 $a \in (1, 2)$ 时单调递减, 此时 $\varphi(a) < \varphi(1) = 0$ 不符合;

③ $k > 0$ 时, $\because \varphi'(a) = \frac{2ka}{1+a} \left[a - \left(\frac{1}{2k} - 1 \right) \right]$, 若 $\frac{1}{2k} - 1 > 1$, 则 $\varphi(a)$ 在区间 $(1, \min\{2, \frac{1}{2k} - 1\})$ 上单调递减, 此时 $\varphi(a) < \varphi(1) = 0$ 不符合; 若 $\frac{1}{2k} - 1 \leq 1$ 时, 则 $\varphi(a)$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递增, 此时 $\varphi(a) > \varphi(1) = 0$, 符合.

综上得 $\begin{cases} k > 0, \\ \frac{1}{2k} - 1 \leq 1, \end{cases} \rightarrow k \geq \frac{1}{4}$, 即实数 k 的取值范围为 $\left[\frac{1}{4}, +\infty \right)$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线