

达州市 2023 年普通高中二年级春季期末监测

数学试题（理科）

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$ ， $B = \{x | (x+1)(x+2) \leq 0\}$ ，则 $A \cap B =$

- A. $\emptyset$ B. $[-2, -1]$ C. $[-2, 2]$ D. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

2. 复数 $z = 2 + bi (b \in \mathbf{R}, b \neq 0)$ ，则 $z \cdot \bar{z}$ 的虚部是

- A. bi B. $-b^2$ C. 0 D. b^2

3. 某地区高三学生参加体检，现随机抽取了部分学生的身高，得到下列频数分布表：

身高范围(单位: cm)	[145,155)	[155,165)	[165,175)	[175,185)	[185,195]
学生人数	5	40	40	10	5

根据表格，估计该地区高三学生的平均身高是

- A. 165 B. 167 C. 170 D. 173

4. 已知 $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{4}{5}$ ，则 $\sin 2x =$

- A. $\frac{7}{25}$ B. $\frac{8}{25}$ C. $\frac{9}{25}$ D. $\frac{16}{25}$

5. $(1 - 2x + x^2)^3$ 的展开式中， x^3 的系数为

- A. 20 B. -20 C. -15 D. 15

6. 某市 2023 年中考体育考试要求考生必须在篮球、足球、排球这三个项目中选择一个项目考试。如果这三个项目该市一初三寝室的四名同学都有人选，则这四名同学所有可能选择的方案数为

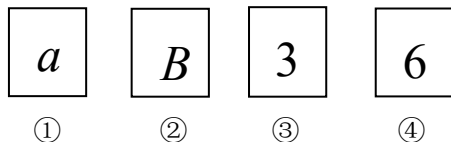
- A. 72 B. 36 C. 18 D. 24

7. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，直线 $x = c$ 与

C 的一个交点为 P ， $|PF_1| = 3|PF_2|$ ，则 C 的离心率为

- A. $\sqrt{5}$ B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

8. 桌上放着 4 张卡片，每张卡片的一面写着一个大写或小写字母，另一面写着一个 0 到 9 的整数数字，小明只能看到卡片的一面. 下面的 4 张卡片，要判断命题“卡片的一面是大写字母，这张卡片的另一面是奇数”为真，小明至少翻开的卡片是



- A. ①② B. ②③ C. ②④ D. ③④
9. 已知 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -4$, $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 则 $\frac{b^2 c \cos A \cos C + bc^2 \cos B \cos A}{a(\sin A + \cos A)} =$

- A. $\sqrt{3}+1$ B. $\sqrt{3}-1$ C. $4\sqrt{3}+4$ D. $4\sqrt{3}-4$

10. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 满足 $\overrightarrow{CP} = \lambda \overrightarrow{CD} + \mu \overrightarrow{CC_1}$, $\lambda \in [0,1]$, $\mu \in [0,1]$. 在满足条件的 P 中随机取一点， B_1P 与 AD 所成角小于等于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{\pi}{4}$

11. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0, a \neq b)$ 任意两条相互垂直的切线的交点轨迹为圆:

$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, 这个圆称为椭圆的蒙日圆. 在圆 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = r^2 (r > 0)$ 上总存在点 P , 使得过点 P 能作椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$ 的两条相互垂直的切线, 则 r 的取值范围是

- A. (1, 9) B. [1, 9] C. (3, 7) D. [3, 7]

12. 设 a_n 表示集合 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的子集个数, $b_n = \log_2 a_n$, $f_k(x) = \sum_{i=1}^k \frac{\cos(b_i x)}{a_i}$,

其中 $k \in \mathbf{N}^*$. 给出下列命题:

①当 $k=1$ 时, $(\frac{7\pi}{8}, 0)$ 是函数 $f_1(2x - \frac{\pi}{4})$ 的一个对称中心;

②当 $k=1$ 时, 函数 $f_1(2x - \frac{\pi}{4})$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增;

③函数 $f_2(x)$ 的值域是 $[-\frac{3}{8}, \frac{3}{4}]$;

④对任意的实数 x , 任意的正整数 k , $|f_k(x)| < 1$ 恒成立.

其中是真命题的为

- A. ①③ B. ②④ C. ①③④ D. ②③④

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 a, b 满足 $a = (3, 1)$, $b = (1, k)$, $(a - b) \perp a$, 则 $k =$ _____.

14. 曲线 $y = x^3 + \ln(x - 1)$ 在点 $(2, 8)$ 处的切线方程是_____.

15. 某玩具厂计划设计一款玩具，准备将一个棱长为 4cm 的正四面体（所有棱长都相等的三棱锥）密封在一个圆柱形容器内，并且这个正四面体在该圆柱形容器内可以任意转动，则该圆柱形容器内壁高的最小值为_____ cm .

16. 已知 x_1, x_2 是函数 $f(x) = |\log_2 x| - m (m \in \mathbf{R})$ 的两个零点，且 $x_1 < x_2 < 2x_1$ ，记 $a = 2^{(x_1+4)(x_2+1)}$, $b = (x_2+1)^{2(x_1+4)}$, $c = (x_1+4)^{2(x_2+1)}$ ，用 “ $<$ ” 把 a, b, c 连接起来_____.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一) 必考题：共 60 分.

17. (12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 前五项和为 15，等比数列 $\{b_n\}$ 的前三项积为 8，且 $a_1 = b_1 = 1$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $c_n = a_n b_n$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (12 分)

某地区新高考要求语文、数学和英语是考生的必考科目，考生还要从物理、化学、生物、历史、地理和政治六个科目中选取三个科目作为选考科目. 现从该地区已选科的学生中随机选出 200 人，对其选科情况进行统计，选考物理的人占 60%，选考政治的人占 75%，物理和政治都选的有 80 人.

(1) 完成选考物理和政治的人数的 2×2 列联表，并判断是否可以在犯错误概率不超过 0.1% 的前提下，认为考生选考物理与选考政治有关？

	选考政治的人数	没选考政治的人数	合 计
选考物理的人数			
没选考物理的人数			
合 计			

(2) 在该地区已选科的考生中随机选出 3 人，这 3 人中物理和政治都选了的考生的人数为 X ，视频率为概率，求 X 的分布列和数学期望.

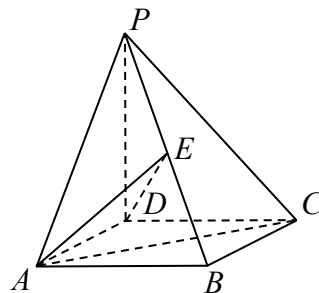
附 参考数据和公式：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a + b + c + d.$$

19. (12 分)

已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，
且 $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ， $PA=PC$ ， $PD \perp AD$ ， E 为 PB 中点.



(1) 求证: $AC \perp DE$;

(2) 若 PB 与底面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

求二面角 $P-AE-D$ 的余弦值.

20. (12 分)

已知抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 上任意一点 M 到焦点 F 的距离比 M 到 y 轴的距离大 1.

(1) 求 E 的标准方程;

(2) $l_1 \cap l_2 = F$, $l_1 \perp l_2$, l_1 交 E 于 A, C 两点, l_2 交 E 于 B, D 两点. 求四边形 $ABCD$ 的面积的最小值.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = 2 \ln x - ax (a \in \mathbf{R})$, $g(x) = xf(x)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $g(x)$ 存在极大值点 x_0 , 且 $g(x_0) > e^2$, 求 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 4$, 直线 l 过点 $P(3, 1)$ 且倾斜角为 α . 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 写出直线 l 的参数方程(用 P 点坐标与 α 表示)和曲线 C 的极坐标方程;

(2) 设直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ 的最小值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x) = 2|x-1| + |2x+1|$, 函数 $f(x)$ 的最小值为 k .

(1) 求 k 的值;

(2) 已知 a, b, c 均为正数, 且 $3a+2b+c=k$, 求 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值.