哈尔滨市第九中学 2023 届高三第四次模拟考试
数学试卷

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题），满分 150 分，考试时间 120 分钟

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 命题 $p:\forall x\in\{x|1\le x\le 5\}$，$x^2-4x>5$，则命题 p 的否定是（　　）

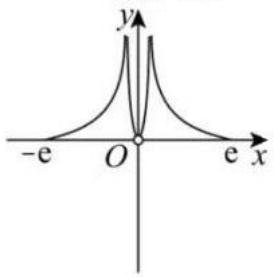
A. $\exists x\in\{x|1\le x\le 5\}$，$x^2-4x\le 5$　　B. $\exists x\notin\{x|1\le x\le 5\}$，$x^2-4x\le 5$

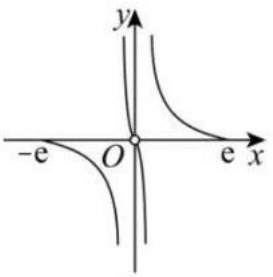
C. $\forall x\notin\{x|1\le x\le 5\}$，$x^2-4x\le 5$　　D. $\forall x\in\{x|1\le x\le 5\}$，$x^2-4x\le 5$

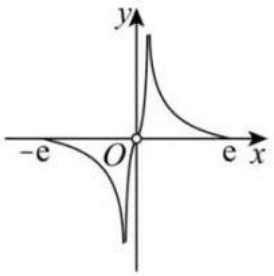
2. 已知集合 $A=\left\{x\,|\,x=\sin\dfrac{n\pi}{2},n\in Z\right\}$，$B=\{x\,|\,x=ab,a,b\in A\}$，则集合 B 的子集的个数是（　　）

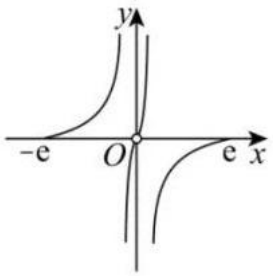
A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 16

3. 函数 $y=\dfrac{\ln x^2-2}{\ln x^2+2}\sin x$ 的部分图像大致为（　　）

A.


B.


C.


D.


4. 过坐标原点的直线 l 与圆 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 相交，且将该圆分成的两段弧长之比为 2:1，则 l 的斜率为（　　）

A. $4\pm\sqrt{15}$　　B. $\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$　　C. $\sqrt{3}$ 或 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{2}$ 或 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

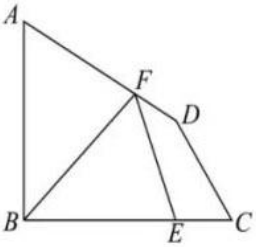
5. 现代建筑物的设计中通常会运用各种曲线、曲面，将美感发挥到极致. 如图所示的游客观光塔，它的主体结构呈螺旋形，高15.6m，结合旋转楼梯的设计，体现了建筑中的数学之美. 某游客从楼梯底端出发，一直走到顶部，现把该游客的运动轨迹投影到塔的轴截面，得到的曲线方程为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0),(x,y$ 的单位：m$)$. 该游客根据观察发现整个运动过程中，相位的变化量为 $\frac{11\pi}{4}$，则 ω 的值约为（　　）

A. 0.55　　B. 0.65　　C. 0.75　　D. 0.85

6. 某同学有一个形如圆台的水杯如图所示，已知圆台形水杯的母线长为6cm，上、下底面圆的半径分别为4cm和2cm. 为了防烫和防滑，水杯配有一个杯套，包裹水杯 $\frac{2}{3}$ 高度以下的外壁和杯底，如图中阴影部分所示，则杯套的表面积为（不考虑水杯材质和杯套的厚度）（　　）

A. $24\pi\text{cm}^2$　　B. $25\pi\text{cm}^2$　　C. $\frac{68}{3}\pi\text{cm}^2$　　D. $\frac{76}{3}\pi\text{cm}^2$

7. 如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$\angle BCD=60^\circ$，$\angle ADC=150^\circ$，$\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{EC}$，$CD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$BE=\sqrt{3}$，若点 F 为边 AD 上的动点，则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BF}$ 的最小值为（　　）



A. 1　　B. $\frac{15}{16}$　　C. $\frac{31}{32}$　　D. 2

8. 已知函数 $f(x)=e^{x^2-2\ln x}-2a\ln x+ax^2$ 有两个不同的零点，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-\infty,-\sqrt{e})$　　C. $(-\infty,-e)$　　D. $(-\sqrt{e},0)$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知复数 $z=a+bi(a,b\in R)$，其共轭复数为 $\bar{z}$，则下列结果为实数的是（　　）

A. z^2　　B. $|z^2|$　　C. $(z+1)(\bar{z}+1)$　　D. $(z-\bar{z})\cdot i^{2023}$

10. 已知 $a>0,b>0$，且 $2a+b=4$，则（　　）

A. $\log_2 a+\log_2 b\le 1$　　B. $2^{a-b}>\frac{1}{4}$

C. $\sqrt{2a}+\sqrt{b}\ge 2\sqrt{2}$　　D. $\frac{4}{a}+\frac{1}{2b}\ge\frac{25}{8}$

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M 为 DD_1 中点，N 为正方形 $ABCD$ 所在平面内一动点，则下列命题正确的有（　　）

A. 若 $MN=2$，则线段 MN 中点 P 的轨迹所围成图形的面积为 π

B. 若 N 到直线 BB_1 与到直线 DC 的距离相等，则点 N 的轨迹为抛物线

C. 若直线 D_1N 与 AB 所成角为 $\frac{\pi}{3}$，则点 N 的轨迹为双曲线

D. 若直线 MN 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\frac{\pi}{3}$，则点 N 的轨迹为椭圆

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，$\{b_n\}$ 是公比为 q 的正项等比数列.

记 $A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，$G_n=\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}$，$D_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k-A_n)^2$，$F_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{G_n}$，则（　　）

参考公式：$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

A. 当 $F_3=\frac{7}{2}$ 时，$q=2$　　B. 当 $D_5=2$ 时，$D_7=4$

C. $F_n\ge 1$　　D. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{D_{2k+1}}<\frac{3}{d^2}$

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

第 II 卷（非选择题　共 90 分）

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 请将答案写在答题纸指定位置.

13. 已知 $(x+1)^5 = a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5$，则 $a_1 + a_3 + a_5$ 的值为_____.

14. 幂函数 $f(x) = x^{\alpha}(\alpha \in R)$ 满足：$\forall x \in R, f(-x) = f(x)$，且 $f(-1) < f(2) < 2$，请写出符合上述条件的一个函数 $f(x) =$_____.

15. 已知红箱内有 3 个红球、2 个白球，白箱内有 2 个红球、3 个白球，所有小球大小、形状完全相同. 第一次从红箱内取出一球后再放回去，第二次从与第一次取出的球颜色相同的箱子内取出一球，然后再放回去，以此类推，第 $k+1$ 次从与第 k 次取出的球颜色相同的箱子内取出一球，然后再放回去. 则第 3 次取出的球是红球的概率为_____.

16. 已知椭圆 C 的一个焦点为 F，短轴 B_1B_2 的长为 $2\sqrt{3}$，P, Q 为椭圆 C 上异于 B_1, B_2 的两个点. 设 $\angle PB_1B_2 = \alpha, \angle PB_2B_1 = \beta$，且 $\tan(\alpha+\beta) = -3(\tan\alpha + \tan\beta)$，则 ΔPQF 周长的最大值为_____.

四、解答题：本题共 6 小题，满分 70 分（17 题 10 分，18 题至 22 题 12 分）. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 已知 ΔABC 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，且 $\dfrac{2\sqrt{3}ac\sin C}{(a^2+c^2-b^2)\sin A} = \tan A + \tan B$.

（1）求 $\cos A$ 的值；

（2）设 AO 为 BC 边上的高，$a = \sqrt{3}$，求 AO 的最大值.

18. 如图 1，在梯形 $ABCD$ 中，$BC \parallel AD$，$AB \perp AD$，$AB = 2$，$BC = 3$，$AD = 4$，线段 AD 的垂直平分线与 AD 交于点 E，与 BC 交于点 F，现将四边形 $CDEF$ 沿 EF 折起，使 C，D 分别到点 G，H 的位置，得到几何体 $ABFEHG$，如图 2 所示.

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

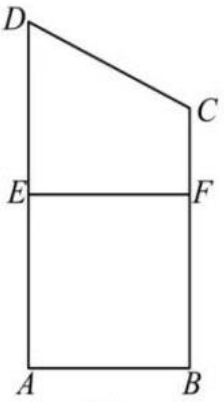


图1

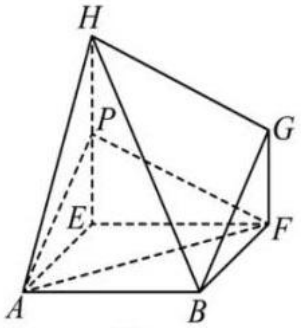
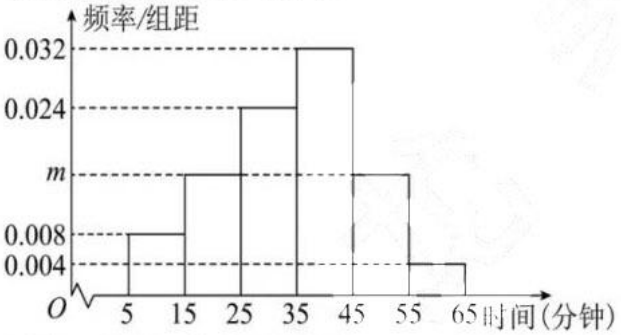


图2

(1)判断线段 EH 上是否存在点 P，使得平面 PAF // 平面 BGH，若存在，求出点 P 的位置；若不存在，请说明理由.

(2)若 $AH=2\sqrt{2}$，求平面 ABH 与平面 BGH 所成角的正弦值.

19. 随着网络技术的迅速发展，直播带货成为网络销售的新渠道.某服装品牌为了给所有带货网络平台分配合理的服装量，随机抽查了 100 个带货平台的销售情况，销售每件服装平均所需时间情况如下频率分布直方图.



(1)求 m 的值，并估计这 100 个带货平台销售每件服装所用时间的平均数 a；（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）

(2)假设该服装品牌所有带货平台销售每件服装平均所需时间 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 近似为 a，$\sigma^2=100$.若该服装品牌所有带货平台约有 10000 个，销售每件服装平均所需时间在区间 $(14.4,44.4)$ 内的平台属于“合格平台”.为了提升平台销售业务，该服装品牌总公司对平台进行奖罚制度，在时间大于 44.4 分钟的平台中，每卖一件扣除 $\frac{100s}{317}(0<s<10)$ 元；在时间小于 14.4 分钟的平台中，每卖一件服装奖励 $\frac{s^3}{23}$ 元；对于“合格平台”，每卖一件服装奖励 1 元.求该服装品牌总公司在所有平台均销售一件服装时至少需要准备多少资金用于本次平台销售业务提升.

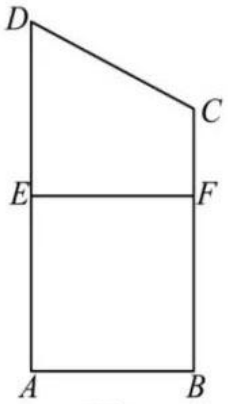


图1

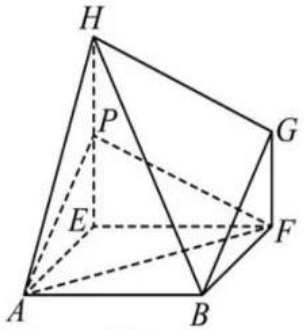
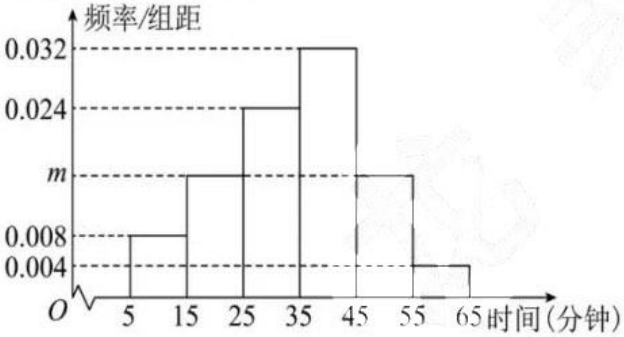


图2

(1)判断线段 EH 上是否存在点 P，使得平面 PAF // 平面 BGH，若存在，求出点 P 的位置；若不存在，请说明理由.

(2)若 $AH=2\sqrt{2}$，求平面 ABH 与平面 BGH 所成角的正弦值.

19. 随着网络技术的迅速发展，直播带货成为网络销售的新渠道.某服装品牌为了给所有带货网络平台分配合理的服装量，随机抽查了 100 个带货平台的销售情况，销售每件服装平均所需时间情况如下频率分布直方图.



(1)求 m 的值，并估计这 100 个带货平台销售每件服装所用时间的平均数 a；（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）

(2)假设该服装品牌所有带货平台销售每件服装平均所需时间 X 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，其中 μ 近似为 a，$\sigma^2=100$.若该服装品牌所有带货平台约有 10000 个，销售每件服装平均所需时间在区间 $(14.4,44.4)$ 内的平台属于“合格平台”.为了提升平台销售业务，该服装品牌总公司对平台进行奖罚制度，在时间大于 44.4 分钟的平台中，每卖一件扣除 $\frac{100s}{317}(0<s<10)$ 元；在时间小于 14.4 分钟的平台中，每卖一件服装奖励 $\frac{s^3}{23}$ 元；对于“合格平台”，每卖一件服装奖励 1 元.求该服装品牌总公司在所有平台均销售一件服装时至少需要准备多少资金用于本次平台销售业务提升.

附：若 X 服从正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.683$，

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.954$，$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)=0.997$.

参考数据：$\frac{\sqrt{6}}{9}\approx 0.2722$.

20. 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1, a_{n+1}=2a_n-n^2+3n$，记 $b_n=a_n-n^2+n\ (n\in N^*)$.

（1）求证：数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 $c_n=(2n-1)b_n$，求 c_n 的前 n 项和 T_n；

（3）记 $d_n=1-\frac{(-1)^n}{b_{n+1}}$，求 $d_n-\frac{1}{d_n}$ 的最大值与最小值.

21. 已知圆心为 D 的动圆经过定点 $F_1(-2,0)$，且内切于圆 $F_2:(x-2)^2+y^2=32$.

(1)求动点 D 的轨迹 C 的方程；

(2)直线 $l:x=my+1(m>0)$ 与 C 相交于 M,N 两点，过 C 上的点 P 作 x 轴的平行线交线段 MN 于点 Q，直线 OP 的斜率为 k（O 为坐标原点），ΔMPQ 的面积为 S_1，ΔNPQ 的面积为 S_2，若 $\frac{|MP|}{|NP|}=\frac{S_1}{S_2}$，判断 $\frac{k}{m}$ 是否为定值？并说明理由.

22. 曲线的曲率是针对曲线上某个点的切线方向角对弧长的转动率，曲线的曲率越大，表示曲线的弯曲程度越大.

若记 $f''(x)=[f'(x)]'$，则函数 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的曲率 $K=\frac{|f''(x_0)|}{\left[1+(f'(x_0))^2\right]^{\frac{3}{2}}}$.

（1）求证：抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 在 $x=-\frac{b}{2a}$ 处弯曲程度最大；

（2）已知函数 $g(x)=6x^2\ln x-2ax^3-9x^2, h(x)=2xe^x-4e^x+ax^2$，$a\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，若 $g(x),h(x)$ 曲率为 0 时 x 的最小值分别为 x_1,x_2，求证：$\frac{x_1^2}{e^{x_2}}>e^{\frac{8}{3}}$

附：若 X 服从正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.683$，

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.954$，$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)=0.997$.

参考数据：$\frac{\sqrt{6}}{9}\approx 0.2722$.

20. 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1, a_{n+1}=2a_n-n^2+3n$，记 $b_n=a_n-n^2+n\ (n\in N^*)$.

（1）求证：数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 $c_n=(2n-1)b_n$，求 c_n 的前 n 项和 T_n；

（3）记 $d_n=1-\frac{(-1)^n}{b_{n+1}}$，求 $d_n-\frac{1}{d_n}$ 的最大值与最小值.

21. 已知圆心为 D 的动圆经过定点 $F_1(-2,0)$，且内切于圆 $F_2:(x-2)^2+y^2=32$.

(1)求动点 D 的轨迹 C 的方程；

(2)直线 $l:x=my+1(m>0)$ 与 C 相交于 M,N 两点，过 C 上的点 P 作 x 轴的平行线交线段 MN 于点 Q，直线 OP 的斜率为 k（O 为坐标原点），ΔMPQ 的面积为 S_1，ΔNPQ 的面积为 S_2，若 $\frac{|MP|}{|NP|}=\frac{S_1}{S_2}$，判断 $\frac{k}{m}$ 是否为定值？并说明理由.

22. 曲线的曲率是针对曲线上某个点的切线方向角对弧长的转动率，曲线的曲率越大，表示曲线的弯曲程度越大.

若记 $f''(x)=[f'(x)]'$，则函数 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的曲率 $K=\frac{|f''(x_0)|}{\left[1+(f'(x_0))^2\right]^{\frac{3}{2}}}$.

（1）求证：抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 在 $x=-\frac{b}{2a}$ 处弯曲程度最大；

（2）已知函数 $g(x)=6x^2\ln x-2ax^3-9x^2, h(x)=2xe^x-4e^x+ax^2$，$a\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，若 $g(x),h(x)$ 曲率为 0 时 x 的最小值分别为 x_1,x_2，求证：$\frac{x_1^2}{e^{x_2}}>e^{\frac{8}{3}}$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。