

理科数学

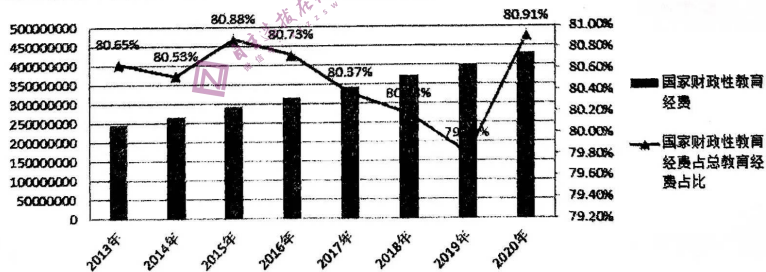
(满分：150 分，时间：120 分钟)

注意事项：

1. 考试开始前，请用黑色签字笔将答题卡上的姓名，班级，考号填写清楚，并在相应位置粘贴条形码。
2. 客观题答题时，请用 2B 铅笔答题，若需改动，请用橡皮轻轻擦拭干净后再选涂其它选项；主观题答题时，请用黑色签字笔在答题卡相应的位置答题；在规定区域以外的答题不给分；在试卷上作答无效。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | (x+2)(x-3) < 0\}$ ，集合 $B = \{x | x < 1\}$ ，则 $A \cup B =$
 A. $(-\infty, 3)$ B. $(-2, 1)$ C. $(-2, 3)$ D. $(-\infty, 1)$
2. 在复平面内，复数 $z = \frac{i+2}{i}$ 对应的点位于
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 下图是 2013—2020 年国家财政性教育经费（单位：万元）和国家财政性教育经费占总教育经费占比的统计图，下列说法正确的是

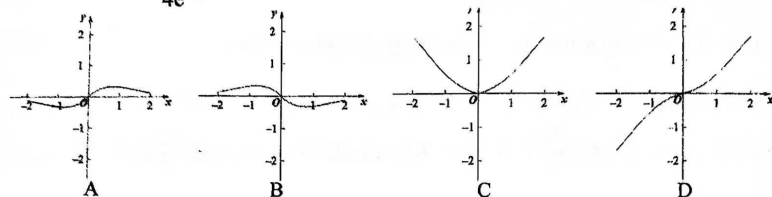


- A. 2019 年国家财政性教育经费和国家财政性教育经费占总教育经费占比均最低
- B. 国家财政性教育经费逐年增加
- C. 国家财政性教育经费占比逐年增加
- D. 2020 年国家财政性教育经费是 2014 年的两倍

4. 已知曲线 $y = -2\cos(x + \varphi)$ 的一条对称轴是 $x = \frac{\pi}{3}$, 则 φ 的值可能为

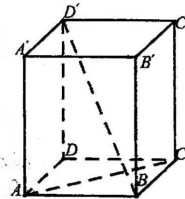
- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

5. 函数 $f(x) = \frac{\sin x}{4e^{-|x|}}$ 在 $[-2, 2]$ 上的大致图象是



6. 在长方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 中, $AA' = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}BC$, 连接 AC, BD' , 则

- A. 直线 BD' 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\frac{\pi}{6}$
 B. 直线 BD' 与平面 $BB'C'C$ 所成角为 $\frac{\pi}{3}$
 C. 直线 BD' 与直线 AA' 所成角为 $\frac{\pi}{4}$
 D. $BD' = 2AC$



7. 已知函数 $f(x) = ax + \frac{\ln x}{b} + 1$ 在 $x = 1$ 处取得极值 0, 则 $a + b =$

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

8. 某学校安排 3 名教师指导 4 个学生社团, 每名教师至少指导一个社团, 每个社团只需一位指导老师, 则不同的安排方式共有

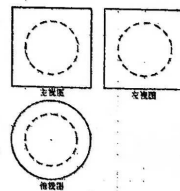
- A. 12 种 B. 24 种 C. 36 种 D. 72 种

9. 已知锐角 α 满足 $\frac{1}{1 - \tan \alpha} - \frac{1}{1 + \tan \alpha} = 1$, 则 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right) =$

- A. $-\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ B. -1 C. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ D. 1

10. 如图, 网络上绘制的是某质地均匀内部为空的航天器件的三视图 (图中小方格是边长为 1 cm 的正方形), 该器件由平均密度为 9.0 g/cm^3 的合金制成, 则该器件的质量为

- A. $390\pi \text{ g}$
 B. $342\pi \text{ g}$
 C. $260\pi \text{ g}$
 D. $228\pi \text{ g}$



11. 过双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点 F 作 C 的其中一条渐近线的垂线

l , 垂足为 M , l 与 C 的另一条渐近线交于点 N , 且 $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MF} = \mathbf{0}$, 则 C 的渐近线方程为

- A. $2x \pm y = 0$ B. $\sqrt{3}x \pm y = 0$ C. $\sqrt{2}x \pm y = 0$ D. $x \pm y = 0$

12. 已知 $a = e^{0.1}$, $b = 1.05$, $c = \ln 3$, 则
 A. $a > b > c$ B. $c > a > b$ C. $b > a > c$ D. $a > c > b$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知平面向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 且 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 在 $(1 - \frac{1}{\sqrt{x}})^7$ 的展开式中, $\frac{1}{x}$ 的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (用数字作答).

15. 已知抛物线 $x^2 = 2y$ 上两点 A, B 关于点 $M(2, t)$ 对称, 则直线 AB 的斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = \frac{2\pi}{3}$, D 为 BC 边上一点, 且 $2BD = DC$, 则 $\frac{AD}{AB}$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

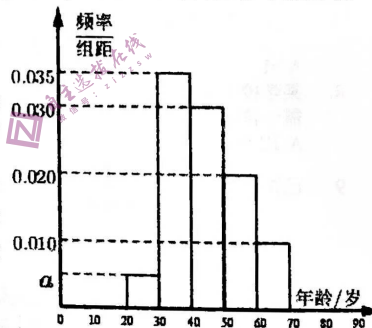
(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

2018 年 12 月 8 日, 我国在西昌卫星发射中心用长征三号乙运载火箭成功发射嫦娥四号探测器, 开启了月球探测的新旅程. 为了解广大市民是否实时关注了这一事件, 随机选取了部分年龄在 20 岁到 70 岁之间的市民作为一个样本, 将此样本按年龄 $[20, 30)$, $[30, 40)$, $[40, 50)$, $[50, 60)$, $[60, 70]$ 分为 5 组, 并得到如图所示的频率分布直方图.

- (1) 求图中实数 a 的值, 并估计样本数据中市民年龄的众数;

- (2) 为进一步调查市民在日常生活中是否关注国家航天技术发展的情况, 现按照分层抽样的方法从 $[40, 50)$, $[50, 60)$, $[60, 70]$ 三组中抽取了 6 人. 从这 6 人中任意抽取 3 人了解情况. 记这 3 人中年龄在 $[40, 50)$ 的人数为 X , 求随机变量 X 的分布列及数学期望.



18. (12 分)

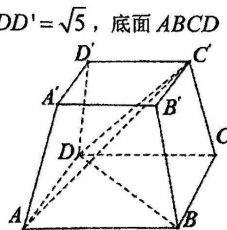
已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且满足 $S_n + n = 2a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- (1) 求证: 数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列;

- (2) 若 $b_n = \frac{2^n}{a_n \cdot a_{n+1}}$, 记 T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求满足不等式 $T_n < \frac{13}{14}$ 的 n 的最大值.

19. (12分)

如图, 棱台 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, $AA'=BB'=CC'=DD'=\sqrt{5}$, 底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, 底面 $A'B'C'D'$ 是边长为 2 的正方形, 连接 AC', BD, DC' .



- (1) 证明: $AC' \perp BD$;
- (2) 求二面角 $A-DC'-B$ 的余弦值.

20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 且过点 $A(1, \frac{3}{2})$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线 l 交椭圆于 P, Q 两点, 直线 AP, AQ 分别交 x 轴于点 M, N , 求证: $|AM| = |AN|$.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = \sin x - e^x$, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数.

- (1) 证明: $f'(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 存在唯一极大值点;
- (2) 若对 $\forall x \in (-1, 0)$, 都有 $f(x) \leq a \cos x$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{2}t \\ y = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$
 在

以坐标原点为极点, x 轴非负半轴为极轴的极坐标系下, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 6 \cos \theta$.

- (1) 求 l 的普通方程和 C 的直角坐标方程;
- (2) 已知点 $P(1, 0)$, 若直线 l 与曲线 C 相交于 A, B 两点, 求 $|PA| + |PB|$ 的值

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = |x-1| + |x-2|$.

- (1) 求不等式 $f(x) \leq 5$ 的解集;
- (2) 已知 a, b, c 均为正实数, 若函数 $f(x)$ 的最小值为 t , 且满足 $a+b+c=t$, 求

证: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.