

沈阳市第 120 中学 2023-2024 学年度上学期

高三年级第一次质量监测

数学试题

满分：150 分 时间：120 分钟 命题人：董贵臣 佟艳丽 校对入：高越

一、单选题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1. 设集合 $M = \left\{ x \mid \frac{x}{x-1} \leq 0 \right\}$, $N = \{ x \mid x^2 - 2x < 0 \}$, 则 $M \cap N$ 为 ()

- A. $\{x \mid 0 < x < 2\}$ B. $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$ C. $\{x \mid 0 \leq x < 2\}$ D. $\{x \mid 0 < x < 1\}$

2. 已知 $p: x^2 - x < 0$, 那么命题 p 的一个必要条件是 ()

- A. $0 < x < 1$ B. $-1 < x < 1$ C. $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{2} < x < 2$

3. 给定函数 $f(x) = (x+1)e^x - a$ ($a \in \mathbb{R}$), 若函数 $f(x)$ 恰有两个零点, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $a < -\frac{1}{e^2}$ B. $a \geq 0$
C. $-\frac{1}{e^2} < a < 0$ D. $a > -\frac{1}{e^2}$

4. 若函数 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$ 的图像向左平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位, 所得的图像关于 y 轴对称, 则当 φ 最小时, $\tan \varphi =$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $-\sqrt{3}$

5. 函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 其导函数为 $f'(x)$, 若对任意的正实数 x , 都有 $xf'(x) + 2f(x) > 0$ 恒成立, 且 $f(\sqrt{2}) = 1$, 则使 $x^2 f(x) < 2$ 成立的实数 x 的集合为 ()

- A. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ B. $(-\infty, \sqrt{2})$
C. $(\sqrt{2}, +\infty)$ D. $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

6. 已知 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{14}}{6}$ ($0 < \alpha < \pi$), 则 $\frac{\cos(2\alpha + \frac{3\pi}{2})}{\sin \alpha + \cos \alpha} =$ ()

- A. $-\frac{2\sqrt{7}}{21}$ B. $-\frac{2\sqrt{11}}{33}$ C. $\frac{2\sqrt{11}}{33}$ D. $\frac{2\sqrt{7}}{21}$

7. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 且当 $x \geq 0$ 时 $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$, 若对任意实数 $t \in [\frac{1}{2}, 2]$, 都有 $f(t+a) - f(t-1) > 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$ B. $(-1, 0)$
C. $(0, 1)$ D. $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

试卷第 1 页, 共 4 页

8. 已知函数 $f(x)$ 在定义域上是单调函数, 且 $f[f(x)-2020]=2021$, 当

$g(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x-kx$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上与 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上的单调性相同时, 实数 k 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -1]$ B. $(-\infty, -\sqrt{3}]$ C. $[-1, \sqrt{3}]$ D. $[\sqrt{3}, +\infty)$

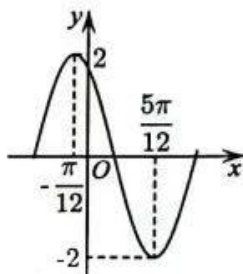
二、多选题 (本题共 4 小题, 共 20 分, 每题选项全对给 5 分, 少选或漏选给 2 分, 错选、多选和不选给 0 分)

9. 已知函数 $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$, 则 ()

- A. $f(x)$ 的定义域为 $[-3, 1]$ B. $f(x)$ 为非奇非偶函数
C. $f(x)$ 的最小值为 2 D. $f(x)$ 的最大值为 8

10. 已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$ ($A>0, \omega>0, 0<\varphi<\pi$) 的部分图象如图所示, 则下列说法正确的是 ()

- A. $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$
B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称
C. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=f\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)$
D. 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上无最小值



11. 已知正实数 x, y 满足 $2x+y=3$, 则 ()

- A. $xy \leq \frac{9}{8}$ B. $x^2 + \frac{y^2}{4} \leq \frac{9}{8}$
C. $4^x + 2^y \geq 4\sqrt{2}$ D. $\frac{x}{y} + \frac{1}{x} \geq \frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

12. 已知直线 $y=-x+2$ 分别与函数 $y=e^x$ 和 $y=\ln x$ 的图象交于点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $x_1+x_2=2$ B. $e^{x_1}+e^{x_2}>2e$
C. $x_1 \ln x_2+x_2 \ln x_1<0$ D. $x_1 x_2 > \frac{\sqrt{e}}{2}$

三、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 若命题: “ $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, 使 $mx_0^2 - mx_0 + 1 \leq 0$ ” 是假命题, 则实数 m 的取值范围为

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-2ax+12, & x \leq 1 \\ x+\frac{4}{x}+a, & x > 1 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)$, 则实数 a 的取值范围是_____

15. 我们比较熟悉的网络新词, 有“yyds”、“内卷”、“躺平”等, 定义方程 $f(x) = f'(x)$

的实数根 x 叫做函数 $f(x)$ 的“躺平点”. 若函数 $g(x) = e^x - x$, $h(x) = \ln x$,

$\varphi(x) = 2023x + 2023$ 的“躺平点”分别为 a, b, c , 则 a, b, c 的大小关系为_____

16. 对于给定的区间 D , 如果存在一个正的常数 T , 使得 $\forall x \in D$ 都有 $x+T \in D$, 且

$f(x+T) > f(x)$ 对 $\forall x \in D$ 恒成立, 那么称函数 $f(x)$ 为 D 上的“ T 增函数”. 已知函数

$g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$, 若函数 $h(x) = g(x^2 + m|x|)$ 是 $(-1, +\infty)$ 上的“3 增函数”, 则实数 m

的取值范围是_____.

四、解答题 (本题共 6 小题, 共 70 分)

17. (10 分) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 4$, $S_n = \frac{a_{n+1} - 4}{3}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记数列 $b_n = (n+1)a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x \cdot \ln x$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 设 $g(x) = f'(x)$, 讨论函数 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的单调性;

19. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\frac{1 + \cos 2B}{\cos A \cdot \cos B} = \frac{4 \sin B}{\sin A}$.

(1) 求 $\frac{\tan A}{\tan B}$ 的值;

(2) 求 $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C}$ 的最小值.

20. (12分) 已知函数 $f(x) = \sin^2 \omega x - \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x + \frac{1}{2}$ ($\omega > 0$), $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = 2$ 相交, 且两相邻交点之间的距离为 π .

(1) 求 $f(x)$ 的解析式, 并求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 已知函数 $g(x) = m \cos(x + \frac{\pi}{3}) - m + 2$, 若对任意 $x_1, x_2 \in [0, \pi]$, 均有 $f(x_1) \geq g(x_2)$,

求 m 的取值范围.

21. (12分) 近期受新冠疫情的影响, 某地区遭受了奥密克戎病毒的袭击, 为了控制疫情, 某单位购入了一种新型的空气消毒剂用于环境消毒, 已知在一定范围内, 每喷洒 1 个单位的消毒剂, 空气中释放的消毒剂浓度 y (单位: 毫克/立方米) 随着时间 x (单位: 小时) 变化的关系如下: 当 $0 \leq x \leq 4$ 时, $y = \frac{8}{6-x} - 1$; 当 $4 < x \leq 10$ 时, $y = 5 - \frac{1}{2}x$. 若多次喷洒, 则某一时刻空气中的消毒剂浓度为每次投放的消毒剂在相应时刻所释放的浓度之和. 由实验知, 当空气中消毒剂的浓度不低于 4 (毫克/立方米) 时, 它才能起到杀灭空气中病毒的作用.

(1) 若一次喷洒 4 个单位的消毒剂, 则有效杀灭时间最长可达几小时?

(2) 若第一次喷洒 2 个单位的消毒剂, 6 小时后再喷洒 a ($1 \leq a \leq 4$) 个单位的消毒剂, 要使接下来的 4 小时中能够持续有效消毒, 试求 a 的最小值.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = e^x + a + \sin x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 研究函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, +\infty)$ 上的单调性;

(2) 若对于 $\forall x \in [0, +\infty)$, 恒有 $f(x) \geq a(x+1) + 1$, 求 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



自主选拔在线

