超级全能生® 天利38套® 教学考试

秘密★启用前

# “超级全能生”2021高考全国卷地区12月联考丙卷

## 数学(理科)

注意事项:

1. 本试题卷共4页,满分150分,考试时间120分钟.
2. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡的相应位置.
3. 全部答案在答题卡上完成,答在本试题卷上无效.
4. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.
5. 考试结束后,将本试题卷和答题卡一并交回.

**一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.**

1.已知集合 $A=\{x|a\leqslant x\leqslant 2\}$, $B=\{x|x^2-3x-4<0\}$, $A\cup B=\{x|-4\leqslant x<4\}$,则 $a$ 的值为 ( )

A. $-4$　　B. 0　　C. 3　　D. 5

2.已知复数 $z_1=1+\mathrm{i}$, $z_2=2-3\mathrm{i}$,则 $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|=$ ( )

A. $\dfrac{\sqrt{13}}{4}$　　B. $\dfrac{13}{4}$　　C. $\dfrac{13}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$

3.已知 $S_n$ 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和,且满足 $a_3=2a_1$, $a_2=2a_1-1$,则 $S_{10}$ 为 ( )

A. 50　　B. 55　　C. 65　　D. 70

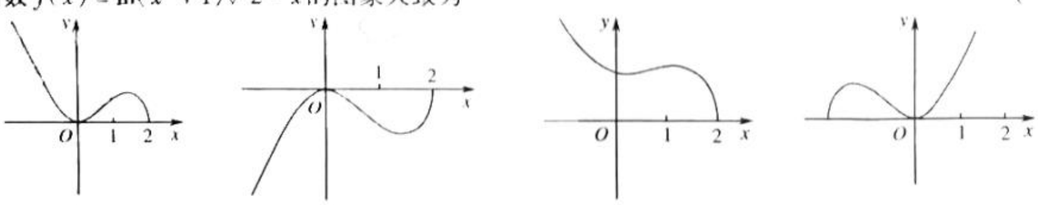
4.已知 $a=\ln 3$, $b=\log_3 e$, $c=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$,则 ( )

A. $a<c<b$　　B. $b<c<a$　　C. $b<a<c$　　D. $a<b<c$

5.若 $x,y$ 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\geqslant 0,\\ x-y+1\geqslant 0,\\ 3x-2y-6\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+3y-1$ 的取值范围是 ( )

A. $[2,33]$　　B. $[1,4]$　　C. $[1,34]$　　D. $[4,34]$

6.函数 $f(x)=\ln(x^2+1)\sqrt{2-x}$ 的图象大致为 ( )



A　　B　　C　　D

7.$\left(3x^2-\frac{1}{x^3}\right)^5$ 的展开式中 $x^5$ 的系数为　　(　　)

A.$-15$　　B.15　　C.405　　D.$-405$

8.已知两条不同的直线 $m,n$ 及不同的平面 $\alpha,\beta$ 满足 $m\perp\alpha,n\subset\alpha,\alpha\perp\beta,m\not\subset\beta$,则下列结论正确的为　　(　　)

A.$n\perp\beta,m\parallel n$　　B.$n\parallel\beta,m\parallel n$

C.$m\perp\beta,m\perp n$　　D.$m\parallel\beta,m\perp n$

9."骰子"是古代民间娱乐用来投掷的一种工具,最常见的骰子是六面骰,它是六个面上分别有一到六个孔(或数字)的正方体,且其相对两面的数字和为7.现在同时掷两个相同的骰子,则向上的点数和大于5的概率为　　(　　)

A.$\frac{13}{18}$　　B.$\frac{5}{9}$

C.$\frac{11}{18}$　　D.$\frac{4}{9}$

10.将函数 $f(x)=\sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度,再将图象上每一点的横坐标伸长为原来的2倍,纵坐标不变得到 $g(x)$的图象,当 $x\in[0,5\pi]$时,$g(x)$的单调递增区间为　　(　　)

A.$\left[4k\pi-\frac{\pi}{3},4k\pi+\frac{5\pi}{3}\right]$　　B.$\left[0,\frac{5\pi}{3}\right]$和$\left[\frac{11\pi}{3},5\pi\right]$

C.$\left[2k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{5\pi}{3}\right]$　　D.$\left[\frac{5\pi}{3},\frac{11\pi}{3}\right]$

11.设 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\geq 1,\\ x+1, & x<1,\end{cases}$ 若 $f(x)=\frac{1}{2}x+b$ 有三个不等实根,则 $b$ 的取值范围为　　(　　)

A.$\left[-\frac{1}{2},\ln2-1\right)$　　B.$[-1,\ln2-1)$

C.$\left[-\frac{1}{2},\ln2-1\right]$　　D.$\left[-\frac{1}{2},\ln2\right)$

12.已知 $F(-1,0)$为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点,直线 $l:x-2y+2=0$ 与 $C$ 交于 $A,B$ 两点,若 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=-2$,则椭圆 $C$ 的方程为　　(　　)

A.$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$　　B.$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　C.$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　D.$\frac{x^2}{2}+y^2=1$

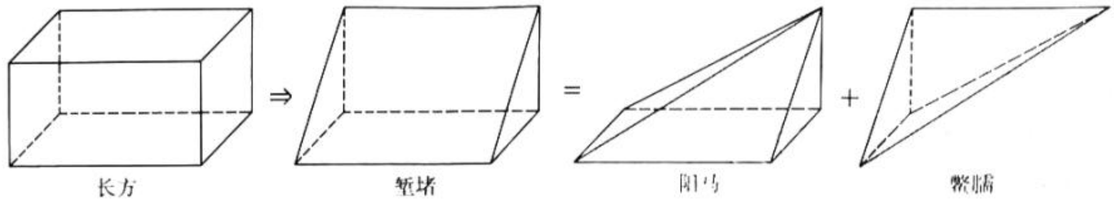
**二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.**

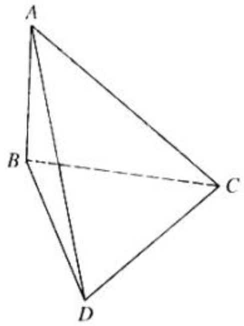
13.已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足:$\vec{a}=(2,1)$,$|\vec{b}|=2$,$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=1$,则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为______.

14.已知 $F_1,F_2$ 为双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点,$O$ 为坐标原点,过点 $F_1$ 且斜率为 $\frac{a}{b}$ 的直线 $l$ 交 $E$ 的右支于点 $M$,且 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$,则双曲线 $E$ 的离心率为______.

15.已知 $S_n$ 为数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和,满足 $a_1=3,S_{n+1}=2S_n-1$,则$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=$______.

16.《九章算术》中把长方体称为"长方".剖分"长方"得两个"堑堵";剖分"堑堵"得一个"阳马"和一个"鳖臑".这一组模型的外形割补关系如图.




也就是说,将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为"阳马",将四个面都为直角三角形的四面体称之为"鳖臑".现已知"鳖臑"$ABCD$ 中,$AB\perp BC$,$AB\perp BD$,$BC\perp CD$,$AB=2$,$BC=3$,$CD=4$,则该"鳖臑"的内切球的表面积为________.

**三、解答题:共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答.第 22,23 题为选考题,考生根据要求作答.**

**(一)必考题:共 60 分.**

17.(12 分)

已知锐角$\triangle ABC$ 的内角 $A,B,C$ 的对边分别为 $a,b,c$,$\cos 2B+\sqrt{3}\sin B=1$.

(Ⅰ)求 $B$;

(Ⅱ)若$\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$,$a+c=6$,求$\triangle ABC$ 的周长.

18.(12 分)

高三某次模拟考试共有 400 名学生参加考试.语文成绩服从正态分布 $N(100,15^2)$,数学成绩服从正态分布 $N(110,12.5^2)$.

(Ⅰ)如果语文成绩大于 130,数学成绩大于 135 为特别优秀,这 400 名学生中本次考试语文、数学成绩特别优秀的学生大约各有多少人?

(Ⅱ)如果语文和数学两科都特别优秀的共有 6 人,从(Ⅰ)中的这些学生中随机抽取 3 人,设 3 人中两科都特别优秀的有 $X$ 人,求 $X$ 的分布列和数学期望.

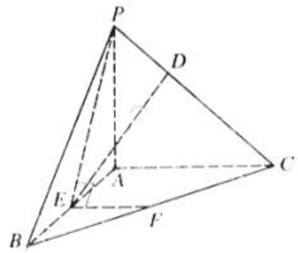
参考公式:若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)=0.68$,$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=0.95$.

19.(12分)

在三棱锥 $P-ABC$ 中,侧面 $PBC$ 为等边三角形,$AB=AC=AP$,$E$,$F$ 分别为 $AB$,$BC$ 的中点,$\angle PEF=90°$.

(Ⅰ)证明:$AC\perp$ 平面 $PAB$;

(Ⅱ)若 $D$ 为 $PC$ 上一点,且满足 $DC=2PD$,求直线 $DE$ 与平面 $PBC$ 所成角的正弦值.




20.(12分)

已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$的焦点为 $F$,$E(a,4)$是 $C$ 上的一点,且$|EF|=5$.

(Ⅰ)求抛物线 $C$ 的标准方程;

(Ⅱ)过点 $M(0,3)$的直线 $l$ 与 $C$ 交于 $A$,$B$ 两点,抛物线 $C$ 在点 $A$,$B$ 处的切线相交于点 $P$,证明:点 $P$ 在定直线上.

21.(12分)

已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{2}{x}$.

(Ⅰ)求 $f(x)$的单调区间;

(Ⅱ)若函数 $g(x)=af(x)+2\ln x-x-1$ 有三个零点,求 $a$ 的取值范围.

**(二)选考题:共10分.请考生在第22,23题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分,作答时,请用2B铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.**

22.[选修4-4:坐标系与参数方程](10分)

在平面直角坐标系 $xOy$ 中,曲线 $C$ 的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数),以 $O$ 为极点,$x$ 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,直线 $l$ 的极坐标方程为$\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}$.

(Ⅰ)求直线 $l$ 的直角坐标方程和曲线 $C$ 的普通方程;

(Ⅱ)若 $M$ 是曲线 $C$ 上的动点,$F(2,0)$,求线段 $MF$ 的中点 $P$ 到直线 $l$ 的最大距离.

23.[选修4-5:不等式选讲](10分)

已知函数 $f(x)=|3x+1|+|x-1|$.

(Ⅰ)解不等式 $f(x)\geq 2$;

(Ⅱ)若 $f(x)$的最小值为 $k$,则当 $a+3b=k$(其中 $a$,$b$ 均为正数)时,求 $a^2+b^2$ 的最小值.

# "超级全能生"2021高考全国卷地区12月联考丙卷

## 数学(理科)　答案详解

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | D | C | C | C | A | D | D | A | B | A | B |

1.A 【解析】本题考查集合的表示方法、集合的并集运算、一元二次不等式的解法，考查运算求解能力、推理论证能力，考查数学运算、逻辑推理核心素养．由题意得集合 $B=\{x\mid -1<x<4\}$，又因为 $A\cup B=\{x\mid -4\leqslant x<4\}$，所以 $a=-4$，故选 A.

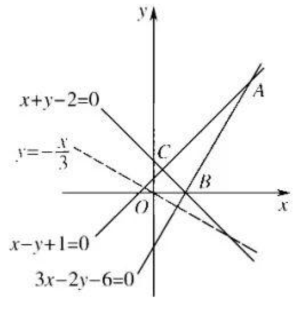
2.D 【解析】本题考查复数的运算、复数的模，考查运算求解能力，考查数学运算核心素养．$\because \dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{2-3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(2-3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{2-2\mathrm{i}-3\mathrm{i}-3}{1+1}=\dfrac{-1-5\mathrm{i}}{2}$，$\therefore \left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$，故选 D.

【一题多解】$\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|=\dfrac{|z_2|}{|z_1|}=\dfrac{|2-3\mathrm{i}|}{|1+\mathrm{i}|}=\dfrac{\sqrt{4+9}}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$，故选 D.

3.C 【解析】本题考查等差数列的通项公式、前 $n$ 项和公式，考查运算求解能力，考查数学运算、逻辑推理核心素养．设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$，则 $\begin{cases}a_1+2d=2a_1,\\ a_1+d=2a_1-1,\end{cases}$ 解得 $a_1=2,d=1$，所以 $S_{10}=10\times 2+\dfrac{10\times 9}{2}\times 1=65$，故选 C.

4.C 【解析】本题考查指数式、对数式的大小比较，考查运算求解能力，考查数学运算、逻辑推理核心素养．因为 $1<a=\ln 3<2$，$b=\log_5 e<1$，$c=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}=9$，所以 $b<a<c$，故选 C.

5.C 【解析】本题考查线性规划，考查运算求解能力和数形结合思想，考查数学运算、逻辑推理核心素养．画出不等式组所表示的可行域如图中阴影部分(含边界)所示，由图易知 $A(8,9)$，$B(2,0)$，$C\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，当目标函数 $z=x+3y-1$ 经过点 $A$ 时取最大值，过点 $B$ 时取最小值，则 $z_{\max}=8+3\times 9-1=34$，$z_{\min}=2+3\times 0-1=1$，故 $z$ 的取值范围是 $[1,34]$，故选 C.




6.A 【解析】本题考查函数的图象与性质，考查推理论证能力，考查数学抽象、逻辑推理核心素养．因为 $f(0)=0$，故排除 C 选项；又 $f(2)=0$，故排除 D 选项；当 $0<x<2$ 时，$f(x)>0$，故选项 A 正确，选项 B 错误，故选 A.

7.D 【解析】本题考查二项式定理，考查运算求解能力，考查数学运算核心素养．$\left(3x^2-\dfrac{1}{x^3}\right)^5$ 的展开式的通项 $T_{r+1}=C_5^r(3x^2)^{5-r}(-x^{-3})^r=(-1)^rC_5^r\cdot 3^{5-r}x^{10-5r}$，由 $10-5r=5$ 得 $r=1$，所以 $\left(3x^2-\dfrac{1}{x^3}\right)^5$ 的展开式中 $x^5$ 的系数为 $(-1)^1C_5^1 3^4=-405$，故选 D.

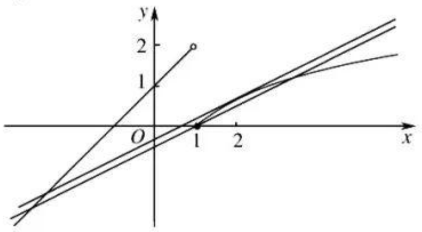
8.D 【解析】本题考查空间中直线与平面之间的位置关系，考查空间想象能力、推理论证能力，考查逻辑推理、直观想象核心素养．由 $m\perp\alpha$，$n\subset\alpha$ 得 $m\perp n$，可排除 A,B 选项；过平面 $\beta$ 内任意一点 $A$ 作 $\alpha$ 与 $\beta$ 的交线 $l$ 的垂线 $AB$，则 $AB\perp\alpha$，所以 $m/\!/AB$．又 $m\not\subset\beta$，所以 $m/\!/\beta$，故选 D.

9.A 【解析】本题考查古典概型，考查推理论证能力，考查逻辑推理核心素养．同时掷两个骰子共有36种不同的结果，其中和为2,3,4,5的分别有1,2,3,4种，所以满足条件的概率为 $1-\dfrac{1+2+3+4}{36}=\dfrac{13}{18}$，故选 A.

10.B 【解析】本题考查三角函数图象的平移变换与性质，考查推理论证能力，考查数学抽象、逻辑推理核心素养．函数 $f(x)=\sin x$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度得到函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象，再将函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象上每一点的横坐标伸长为原来的2倍，纵坐标不变得到函数 $g(x)=\sin\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象．由 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 得 $4k\pi-\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 4k\pi+\dfrac{5\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，所以函数 $g(x)$ 在 $[0,5\pi]$ 上的单调递增区间为 $\left[0,\dfrac{5\pi}{3}\right]$ 和 $\left[\dfrac{11\pi}{3},5\pi\right]$，故选 B.

11.A 【解析】本题考查分段函数、函数与方程、导数的几何意义，考查运算求解能力和推理论证能力，考查数学运算、逻辑推理核心素养．如图所示，当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)=\ln x$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，所以函数 $f(x)$ 在 $(2,\ln 2)$ 处的切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}(x-2)+\ln 2$，此时 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\ln 2-1$ 有两个不等实根；过点 $(1,0)$ 且斜率为 $\dfrac{1}{2}$ 的直

线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 与函数 $f(x)$ 有三个公共点，所以把直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 从直线 $y=\frac{1}{2}x+\ln2-1$ 的位置向下平移到直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 的位置的过程中，方程 $f(x)=\frac{1}{2}x+b$ 有三个不等实根，所以 $b$ 的取值范围为 $\left\{b\,\middle|\,-\frac{1}{2}\leqslant b<\ln2-1\right\}$，故选 A.




12.B 【解析】本题考查椭圆的方程、直线与椭圆的位置关系以及平面向量的数量积，考查运算求解能力与数形结合思想，考查数学运算、逻辑推理核心素养. 设点 $A(2y_1-2,y_1)$，$B(2y_2-2,y_2)$，则 $\overrightarrow{FA}=(2y_1-1,y_1)$，$\overrightarrow{FB}=(2y_2-1,y_2)$，所以 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=5y_1y_2-2(y_1+y_2)+1=-2$ ①. 将直线 $l$ 与椭圆 $C$ 联立消去 $x$ 得 $(a^2+4b^2)y^2-8b^2y+4b^2-a^2b^2=0$，所以 $y_1y_2=\frac{4b^2-a^2b^2}{a^2+4b^2}$，$y_1+y_2=\frac{8b^2}{a^2+4b^2}$，代入①得 $5a^2b^2-3a^2-16b^2=0$ ②. 又 $a^2=b^2+1$ ③. 由②③联立得 $\begin{cases}a^2=4,\\b^2=3,\end{cases}$ 所以椭圆 $C$ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，故选 B.

【一题多解】设椭圆 $C$ 的方程为 $mx^2+ny^2=1(m>0,n>0)$，与直线 $l$ 的方程联立消去 $x$ 得 $(4m+n)y^2-8my+4m-1=0$. 设点 $A(2y_1-2,y_1)$，$B(2y_2-2,y_2)$，则 $\overrightarrow{FA}=(2y_1-1,y_1)$，$\overrightarrow{FB}=(2y_2-1,y_2)$，$y_1+y_2=\frac{8m}{4m+n}$，$y_1y_2=\frac{4m-1}{4m+n}$. 因为 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=5y_1y_2-2(y_1+y_2)+1=-2$，所以将上式代入得 $16m+3n=5$. 又 $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=1$，解得 $n=\frac{1}{3}$，$m=\frac{1}{4}$，所以椭圆 $C$ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，故选 B.

13. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 【解析】本题考查平面向量的数量积、向量的模、夹角公式，考查运算求解能力及化归与转化思想，考查数学运算、逻辑推理核心素养. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=1$，即 $\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=1$. 因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-4$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-4}{\sqrt{5}\times2}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

14. $\sqrt{5}$ 【解析】本题考查双曲线简单的几何性质，考查运算求解能力、推理论证能力及数形结合思想，考查数学运算、逻辑推理核心素养. 已知直线 $l$ 的斜率为 $\frac{a}{b}$，且过点 $F_1(-c,0)$，则直线 $l$ 的方程为 $y=\frac{a}{b}(x+c)$. 设双曲线 $E$ 的渐近线 $y=-\frac{b}{a}x$ 与直线 $l$ 交于点 $N$. 因为 $k_{ON}=-\frac{b}{a}$，$k_l=\frac{a}{b}$，$k_{ON}\cdot k_l=-1$，所以 $ON\perp l$. 因为 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$，所以 $MF_1\perp MF_2$，所以 $ON\,/\!/\,MF_2$. 因为 $O$ 为 $F_1F_2$ 中点，所以 $MF_2=2ON$. 因为点 $O$ 到直线 $l$ 的距离 $ON=\frac{\frac{ac}{b}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}}=a$，所以 $MF_2=2a$. 因为 $|MF_1|-|MF_2|=2a$，即 $|MF_1|=4a$，所以 $|F_1F_2|=\sqrt{(4a)^2+(2a)^2}=2\sqrt{5}a=2c$，所以双曲线 $E$ 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$.

15. $\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 【解析】本题考查等比数列的通项公式、前 $n$ 项和公式，考查运算求解能力、化归与转化思想，考查数学运算、逻辑推理核心素养. 因为 $a_1=3$，$S_{n+1}=2S_n-1$，所以 $S_{n+1}-1=2(S_n-1)$，$S_1-1=a_1-1=2$，所以数列 $\{S_n-1\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $S_n-1=2\times2^{n-1}=2^n$，则 $S_n=2^n+1$. 当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-1}$，所以 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. 当 $n=1$ 时，上式也成立，所以 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

16. $\frac{62-14\sqrt{13}}{9}\pi$ 【解析】本题考查三棱锥的内切球、球的表面积，考查空间想象能力、运算求解能力、推理论证能力，考查数学运算、逻辑推理、直观想象核心素养. 设“鳖臑”的内切球的球心为 $O$，半径为 $r$. 连接 $OA,OB,OC,OD$，将“鳖臑”分割为四个三棱锥 $O-ABC$，$O-ABD$，$O-ACD$，$O-BCD$，所以 $V_{ABCD}=V_{O-ABC}+V_{O-ABD}+V_{O-ACD}+V_{O-BCD}$. 设“鳖臑”$ABCD$ 的表面积为 $S_表$，则由等体积法可得 $V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_表 r=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot AB$，即 $\frac{1}{3}(6+3+5+2\sqrt{13})r=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times4\times2$，解得 $r=\frac{6}{7+\sqrt{13}}=\frac{7-\sqrt{13}}{6}$，所以该内切球的表面积 $S=4\pi r^2=4\pi\times\frac{(7-\sqrt{13})^2}{36}=\frac{62-14\sqrt{13}}{9}\pi$.

17.【名师指导】本题考查三角恒等变换、余弦定理、三角形的面积公式，考查运算求解能力、推理论证能力，考查化归与转化思想，考查数学运算核心素养.

(Ⅰ)利用三角恒等变换及角 $B$ 的取值范围即可求解；(Ⅱ)利用三角形的面积公式及余弦定理求出 $b$，即可求出△$ABC$ 的周长.

**解**：(Ⅰ)由 $\cos2B+\sqrt{3}\sin B=1$，

得 $1-2\sin^2B+\sqrt{3}\sin B=1$. (2分)

因为 $0<B<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\sin B=0$(舍去), (4分)

所以 $B=\frac{\pi}{3}$. (6分)

(Ⅱ)因为△$ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$,即 $\frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}$,

所以 $ac=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$. (8分)

又 $a+c=6$,则由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-2ac-2ac\cos\frac{\pi}{3}=36-3ac=24$,

所以 $b=2\sqrt{6}$, (10分)

所以△$ABC$ 的周长为 $a+b+c=6+2\sqrt{6}$. (12分)

18.【名师指导】本题考查正态分布、离散型随机变量的分布列与数学期望,考查运算求解能力,考查数学运算、逻辑推理核心素养.

(Ⅰ)由正态分布公式分别求出语文、数学成绩特别优秀的概率,再乘学生总数即可求解;(Ⅱ)由题可得 $X$ 的所有可能取值,再求出对应的概率即可求得分布列与数学期望.

**解**:(Ⅰ)设语文成绩特别优秀的概率为 $p_1$,

数学成绩特别优秀的概率为 $p_2$,

则 $p_1=P(X>130)=(1-0.95)\times\frac{1}{2}=0.025$, (1分)

$p_2=P(X>135)=(1-0.95)\times\frac{1}{2}=0.025$, (3分)

所以语文成绩特别优秀的学生人数大约为 $400\times0.025=10$(人),

数学成绩特别优秀的学生人数大约为 $400\times0.025=10$(人). (5分)

(Ⅱ)由于语文和数学两科都特别优秀的有6人,则单科特别优秀的有 $10+10-2\times6=8$(人),

则 $X$ 的所有可能取值为0,1,2,3. (6分)

$P(X=0)=\frac{C_8^3}{C_{14}^3}=\frac{14}{91}$, (7分)

$P(X=1)=\frac{C_8^2C_6^1}{C_{14}^3}=\frac{42}{91}$, (8分)

$P(X=2)=\frac{C_8^1C_6^2}{C_{14}^3}=\frac{30}{91}$, (9分)

$P(X=3)=\frac{C_6^3}{C_{14}^3}=\frac{5}{91}$, (10分)

故 $X$ 的分布列如下表所示:

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{14}{91}$ | $\frac{42}{91}$ | $\frac{30}{91}$ | $\frac{5}{91}$ |

(11分)

数学期望 $E(X)=0\times\frac{14}{91}+1\times\frac{42}{91}+2\times\frac{30}{91}+3\times\frac{5}{91}=\frac{9}{7}$. (12分)

19.【名师指导】本题考查空间线面垂直的判定定理与性质、线面角,考查空间想象能力、运算求解能力、化归与转化思想,考查直观想象、逻辑推理、数学运算核心素养.

(Ⅰ)利用三角形中位线定理证明线线平行,再利用线面垂直的判定定理即可求证;(Ⅱ)建立合适的空间直角坐标系,先求出平面 $PBC$ 的法向量与直线 $DE$ 的方向向量,再结合空间向量的夹角公式,即可得解;或利用等体积法求解点 $E$ 到平面 $PBC$ 的距离,进而求解;或利用勾股定理求得点 $A$ 到平面 $PBC$ 的距离,进而得到点 $E$ 到平面 $PBC$ 的距离,求解即可.

**解**:(Ⅰ)证明:取 $PB$ 的中点 $G$,连接 $GA$, $GC$.

因为 $AB=AP$, $BC=PC$,

所以 $AC\perp PB$, $CG\perp PB$. (1分)

又因为 $AC\cap CG=G$,

所以 $PB\perp$ 平面 $ACG$, (2分)

所以 $PB\perp AC$. (3分)

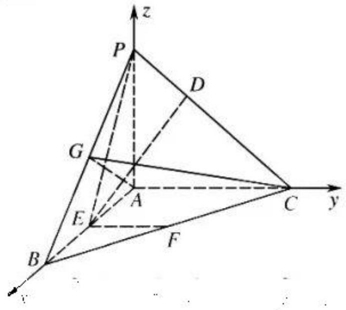
因为 $E$, $F$ 分别为 $AB$, $BC$ 的中点,

所以 $EF /\!/ AC$. (4分)

又因为 $\angle PEF=90^\circ$,即 $EF\perp PE$,

所以 $AC\perp PE$. (5分)

又因为 $PE\subset$ 平面 $PAB$, $PB\subset$ 平面 $PAB$, $PE\cap PB=P$,所以 $AC\perp$ 平面 $PAB$. (6分)




(Ⅱ)解法一:由(Ⅰ)得 $AC\perp$ 平面 $PAB$,

所以 $AC\perp AP$, $AC\perp AB$,

所以 $AB^2+AC^2=BC^2$.

又因为 $AC=AP$, $PB=BC$,

所以 $AB^2+AP^2=PB^2$,

所以 $AP\perp AB$. (7分)

以 $A$ 为坐标原点, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$. (8分)

设 $AB=6$,则 $B(6,0,0)$, $E(3,0,0)$, $D(0,2,4)$, $C(0,6,0)$,

所以 $\overrightarrow{ED}=(-3,2,4)$, $\overrightarrow{DB}=(6,-2,-4)$, $\overrightarrow{DC}=(0,4,-4)$. (9分)

设平面 $PBC$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}6x-2y-4z=0,\\ 4y-4z=0,\end{cases}$

取 $x=1$,得 $\begin{cases}y=1,\\ z=1,\end{cases}$

所以 $\boldsymbol{m}=(1,1,1)$. (10分)

设直线 $DE$ 与平面 $PBC$ 所成角的平面角为 $\theta$,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{ED}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{ED}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{ED}|}$

$=\frac{|-3+2+4|}{\sqrt{3}\times\sqrt{9+4+16}}=\frac{\sqrt{87}}{29}$,

故直线 $DE$ 与平面 $PBC$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{87}}{29}$.

(12分)

解法二:连接 $AD$, $CE$,设 $AB=6$,点 $E$ 到平面 $PBC$ 的

距离为 $h$,由(Ⅰ)得 $AC\perp$ 平面 $PAB$,
所以 $AC\perp AP$,$AC\perp AB$,
所以 $AB^2+AC^2=BC^2$.
又因为 $AC=AP$,$PB=BC$,
所以 $AB^2+AP^2=PB^2$,所以 $AP\perp AB$.
又因为 $AC\cap AB=A$,所以 $AP\perp$ 平面 $ABC$.
由 $V_{E-PBC}=V_{P-EBC}$,
得 $\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle PBC}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle EBC}\cdot AP$, (7 分)
所以 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(6\sqrt{2})^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times6\times6$,
解得 $h=\sqrt{3}$. (9 分)
由题可得 $DE^2=AD^2+AE^2=2^2+4^2+3^2=29$,
所以 $DE=\sqrt{29}$. (11 分)
设直线 $DE$ 与平面 $PBC$ 所成角的平面角为 $\theta$,
则 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{29}}=\frac{\sqrt{87}}{29}$. (12 分)
解法三:连接 $AD$,设 $AB=6$,由题可知点 $E$ 到平面 $PBC$ 的距离等于点 $A$ 到平面 $PBC$ 距离的一半,
设平面 $PBC$ 的中心为 $O$,
则 $OP=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times6\sqrt{2}=2\sqrt{6}$,
$AO=\sqrt{36-24}=2\sqrt{3}$,
所以点 $E$ 到平面 $PBC$ 的距离为 $\sqrt{3}$.
由题可得 $DE^2=AD^2+AE^2=2^2+4^2+3^2=29$,
所以 $DE=\sqrt{29}$. (11 分)
设直线 $DE$ 与平面 $PBC$ 所成角的平面角为 $\theta$,
则 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{29}}=\frac{\sqrt{87}}{29}$. (12 分)

20.【名师指导】本题考查抛物线的定义及标准方程、直线与抛物线的位置关系,考查运算求解能力,考查化归与转化思想,考查数学运算、逻辑推理核心素养.
(Ⅰ)根据题意由点 $E$ 的纵坐标以及抛物线的定义可得 $|EF|=4+\frac{p}{2}=5$,即可求出 $p$ 的值,从而得到抛物线 $C$ 的标准方程;(Ⅱ)利用 $A,B$ 两点在抛物线上,设出 $A,B$ 的坐标,由 $A,B,M$ 三点共线得 $x_1x_2=-12$,进一步利用导数求出在 $A,B$ 两点处的切线方程,求出交点 $P$ 的坐标,即可得证;或由特殊到一般,当 $k_{AB}=0$ 时,易得点 $P$ 在直线 $y=-3$ 上,再设点 $P,A,B$ 的坐标进行验证即可.
**解**:(Ⅰ)由抛物线的定义得 $|EF|=4+\frac{p}{2}=5$,
解得 $p=2$, (2 分)
所以抛物线 $C$ 的标准方程为 $x^2=4y$. (4 分)
(Ⅱ)证法一:设点 $A\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$,$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$,
由 $A,B,M$ 三点共线得 $k_{AB}=k_{AM}$,
即 $\dfrac{\frac{x_2^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}{x_2-x_1}=\dfrac{\frac{x_1^2}{4}-3}{x_1}$,化简可得 $x_1x_2=-12$. (6 分)
因为 $y'=\frac{x}{2}$,所以在点 $A$ 处的切线方程为 $y=\frac{x_1}{2}(x-x_1)+\frac{x_1^2}{4}$, (8 分)
在点 $B$ 处的切线方程为 $y=\frac{x_2}{2}(x-x_2)+\frac{x_2^2}{4}$, (9 分)
两式相减得 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$,$y=\frac{x_1x_2}{4}=-3$, (11 分)
所以交点 $P$ 在定直线 $y=-3$ 上. (12 分)
证法二:当 $k_{AB}=0$ 时,易得点 $P$ 在直线 $y=-3$ 上,
(8 分)
设点 $P(x_0,-3)$,$A\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$,$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$,
且 $y'=\frac{x}{2}$,可得 $-x_1^2+2x_0x_1+12=0$,
$-x_2^2+2x_0x_2+12=0$, (9 分)
则 $x_1,x_2$ 是方程 $-x^2+2x_0x+12=0$ 的两根,
所以 $x_1x_2=-12$. (10 分)
由 $A,B,M$ 三点共线得 $k_{AB}=k_{AM}$,
即 $\dfrac{\frac{x_2^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}{x_2-x_1}=\dfrac{\frac{x_1^2}{4}-3}{x_1}$,化简得 $x_1x_2=-12$ 也成立,
所以点 $P$ 在定直线 $y=-3$ 上. (12 分)

21.【名师指导】本题考查利用导数研究函数的单调性及极值、函数零点问题,考查数学抽象、数学运算、逻辑推理核心素养.
(Ⅰ)对函数进行求导,解不等式即可得解;(Ⅱ)函数有三个零点,则函数存在极大值与极小值,并且极大值大于零,极小值小于零,对 $a$ 进行分类讨论,并利用导数研究函数的单调性和极值,列出并解不等式,即可得解.
**解**:(Ⅰ)由题可知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, (1 分)
$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{x-2}{x^2}$, (2 分)
由 $f'(x)>0$,解得 $x>2$,
由 $f'(x)<0$,解得 $0<x<2$, (3 分)
所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,2)$,单调递增区间为 $(2,+\infty)$. (4 分)
(Ⅱ)由题可得 $g(x)=(a+2)\ln x+\frac{2a}{x}-x-1$,$x>0$,
$g'(x)=\frac{a+2}{x}-\frac{2a}{x^2}-1=-\frac{(x-a)(x-2)}{x^2}$. (5 分)
由 $g'(x)=0$ 得 $x_1=a$,$x_2=2$.
①当 $0<a<2$ 时,由 $g'(x)<0$ 得 $0<x<a$ 或 $x>2$,
则函数 $g(x)$ 在 $(0,a)$,$(2,+\infty)$ 上单调递减,在 $(a,2)$ 上单调递增; (6 分)
由 $g(2)>0$ 得 $(a+2)\ln2+a-2-1>0$,
即 $a>\frac{3-2\ln2}{\ln2+1}$; (7 分)
由 $g(a)<0$ 得 $(a+2)\ln a+2-a-1<0$.
设 $h(x)=(x+2)\ln x-x+1$,$x>0$,
则 $h'(x)=\ln x+\frac{x+2}{x}-1=\ln x+\frac{2}{x}$,
设 $t(x)=h'(x)=\ln x+\frac{2}{x}$,$x>0$,
则 $t'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{x-2}{x^2}$,
当 $0<x<2$ 时,易知 $h'(x)$ 为减函数,$h'(2)=\ln2+1>0$,所以函数 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增.
又因为 $h(1)=0$,所以 $g(a)<0$ 的解为 $0<a<1$,
(9 分)
所以 $\frac{3-2\ln2}{\ln2+1}<a<1$,此时极大值大于零,极小值小于

零，当 $x$ 趋近于 0 时，$g(x)$ 趋近于正无穷大，当 $x$ 趋近于正无穷大时，$g(x)$ 趋近于负无穷大，因而函数 $g(x)$ 有三个零点，满足条件； (10 分)

②当 $a>2$ 时，函数 $g(x)$ 在 $(0,2)$，$(a,+\infty)$ 上单调递减，在 $(2,a)$ 上单调递增.

因为 $g(2)=(a+2)\ln2+a-2-1>0$，即极小值大于零，

所以函数 $g(x)$ 不可能有三个零点； (11 分)

③当 $a=2$ 时，$g'(x)\leqslant 0$，函数 $g(x)$ 单调递减，不可能有三个零点；

④当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，函数 $g(x)$ 不可能有三个零点.

综上可知，$a$ 的取值范围为 $\left(\dfrac{3-2\ln2}{\ln2+1},1\right)$. (12 分)

22.【名师指导】本题考查直角坐标方程与极坐标方程、参数方程与普通方程的互化、点到直线的距离公式，考查运算求解能力，考查数学运算核心素养.

(Ⅰ)利用直角坐标方程与极坐标方程、参数方程与普通方程的互化公式即可求解；(Ⅱ)利用椭圆的参数方程设出点 $M$ 的参数坐标，再利用点到直线的距离公式即可求解.

**解**：(Ⅰ)直线 $l$ 可化为 $\rho\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{4}+\rho\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{4}=3\sqrt{2}$，则 $\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=6$，即直线 $l$ 的直角坐标方程为 $x+y-6=0$. (3 分)

将 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$ ($\theta$ 为参数)化为 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ \dfrac{y}{\sqrt{3}}=\sin\theta\end{cases}$ ($\theta$ 为参数)，

则曲线 $C$ 的普通方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$. (5 分)

(Ⅱ)设点 $M(\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta)$，

则点 $P\left(\dfrac{1}{2}\cos\theta+1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$， (6 分)

$\therefore$ 点 $P$ 到直线 $l$ 的距离 $d=\dfrac{\left|\dfrac{1}{2}\cos\theta+1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-6\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left|\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)-5\right|}{\sqrt{2}}$， (8 分)

则 $d\leqslant\left|\dfrac{-1-5}{\sqrt{2}}\right|=3\sqrt{2}$，当 $\theta=\dfrac{4\pi}{3}$ 时等号成立，

$\therefore$ 点 $P$ 到直线 $l$ 的最大距离为 $3\sqrt{2}$. (10 分)

23.【名师指导】本题考查绝对值不等式的解法、柯西不等式，考查运算求解能力，考查分类与整合思想，考查数学运算、数学抽象核心素养.

(Ⅰ)利用零点分段法去掉绝对值，转化成分段函数，分别解不等式组并求并集即可；(Ⅱ)根据题意利用柯西不等式求解即可；或将 $a$ 用 $b$ 替换，结合二次函数的性质求解即可；或利用其几何意义求解即可.

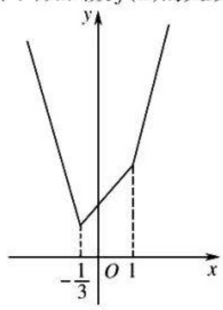
**解**：(Ⅰ) $\because f(x)=\begin{cases}-4x, & x\leqslant-\dfrac{1}{3},\\ 2x+2, & -\dfrac{1}{3}<x<1,\\ 4x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ (2 分)

$\therefore f(x)\geqslant 2$ 等价于 $\begin{cases}-4x\geqslant 2,\\ x\leqslant-\dfrac{1}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x+2\geqslant 2,\\ -\dfrac{1}{3}<x<1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}4x\geqslant 2,\\ x\geqslant 1,\end{cases}$ (3 分)

解得 $x\leqslant-\dfrac{1}{2}$ 或 $0\leqslant x<1$ 或 $x\geqslant 1$，

故不等式 $f(x)\geqslant 2$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x\leqslant-\dfrac{1}{2}\text{ 或 }x\geqslant 0\right\}$. (5 分)

(Ⅱ)解法一：由(Ⅰ)知函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示，




则 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{3}$，$\therefore k=\dfrac{4}{3}$， (6 分)

即 $a+3b=\dfrac{4}{3}$.

由柯西不等式得 $(a^2+b^2)(1^2+3^2)\geqslant(a+3b)^2=\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{16}{9}$， (8 分)

整理得 $a^2+b^2\geqslant\dfrac{8}{45}$，

当且仅当 $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{3}$，即 $3a=b$ 时等号成立.

故 $a^2+b^2$ 的最小值为 $\dfrac{8}{45}$. (10 分)

解法二：由(Ⅰ)和函数图象可知，$f(x)$ 的最小值为 $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{3}$，$\therefore k=\dfrac{4}{3}$， (6 分)

即 $a+3b=\dfrac{4}{3}$，$\therefore a=\dfrac{4}{3}-3b$，

则 $a^2+b^2=\left(\dfrac{4}{3}-3b\right)^2+b^2=10b^2-8b+\dfrac{16}{9}$， (8 分)

易知当 $b=\dfrac{2}{5}$，$a=\dfrac{2}{15}$ 时，$a^2+b^2$ 取得最小值为 $\dfrac{8}{45}$. (10 分)

解法三：由(Ⅰ)和函数图象可知，$f(x)$ 的最小值为 $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{3}$，$\therefore k=\dfrac{4}{3}$， (6 分)

即 $a+3b=\dfrac{4}{3}$，

则 $a^2+b^2=(a-0)^2+(b-0)^2$ 可以转化为点 $(0,0)$ 与直线 $a+3b=\dfrac{4}{3}$ 上的点 $(a,b)$ 的距离的平方，

则距离最小值 $d_{\min}=\dfrac{\dfrac{4}{3}}{\sqrt{1+9}}=\dfrac{4}{3\sqrt{10}}$，

$\therefore$ 当 $b=\dfrac{2}{5}$，$a=\dfrac{2}{15}$ 时，$a^2+b^2$ 取得最小值为 $\dfrac{8}{45}$. (10 分)

# 关于我们

**自主选拔在线**（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 " 专业、专注、有态度 " 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。