



贵阳第一中学 2024 届高三适应性月考卷（一） 数学参考答案

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	D	B	D	C	A	B

【解析】

1. 函数 $y = \ln(1-x)$ 的定义域为 $(-\infty, 1)$ ，不等式 $\frac{x-1}{x} \leq 0$ ，可化为 $x(x-1) \leq 0$ 且 $x \neq 0$ ，所以 $0 < x \leq 1$ ，所以 $A \cap B = \{x | 0 < x < 1\}$ ，故选 A.
2. 当 $x > 0$ 时由基本不等式可得 $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ，当且仅当 $x = \frac{1}{x}$ 时取得“=”，当 $\frac{x^2+1}{x} \geq 2$ 时，则 $\frac{x^2+1}{x} - 2 \geq 0$ ，可得 $\frac{x^2-2x+1}{x} \geq 0$ ，即 $\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ ，解得 $x > 0$ ；所以“ $x > 0$ ”是“ $\frac{x^2+1}{x} \geq 2$ ”的充要条件，故选 C.
3. 对于 A，由正态分布曲线对称性可知： $P(X \geq 10) = 0.5$ ， $P(8 \leq X \leq 12) = 2P(8 \leq X \leq 10)$ ，A 正确；C 正确，对于 B， $\because P(X \geq 8) = P(X \leq 12)$ ， $\therefore P(X \leq 8) + P(X \leq 12) = P(X \leq 8) + P(X \geq 8) = 1$ ，B 正确；对于 D， $\because D(X) = 2^2 = 4$ ， $\therefore D(2X+1) = 4D(X) = 16$ ，D 错误，故选 D.
4. 当 $x=0$ 时， $f(x)=0$ ，排除 A 选项；因为 $f(-x)=f(x)$ ， $x \in \mathbf{R}$ ，所以 $f(x)$ 为偶函数，排除 C；当 $x > 0$ 时， $f'(x) = \frac{2x \sin x + (x^2+1) \cos x}{e^2}$ ， $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ 时， $2x \sin x + (x^2+1) \cos x > 0$ ，所以 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 单调递增； $f'(\frac{\pi}{2}) > 0$ ， $f'(\pi) < 0$ ，所以存在 $m \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ，使得 $f'(m) = 0$ ，故 $f(x)$ 在 $(0, m)$ 上单调递增，在 (m, π) 上单调递减，排除 D，故选 B.
5. 当 $a=0$ 时，满足题意；当为二次函数时，因为 $f(x) = ax^2 + 2(a-1)x + 2$ 在 $(-\infty, 4)$ 上为减函数，所以 $\begin{cases} a > 0, \\ \frac{1-a}{a} \geq 4, \end{cases}$ 解得 $0 < a \leq \frac{1}{5}$ ，综上所述 a 的取值范围为 $[0, \frac{1}{5}]$ ，故选 D.

□ ■ ■ ■ □ □ □

6. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 记点 $A(0, 3c)$, 由题意可知, 点 $F(c, 0)$ 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点, 易知直线 AF 与直线 $y = \frac{b}{a}x$ 垂直, 且 $k_{AF} = -3$, 可得 $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$, 因此, 该双曲线的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$, 故选 C.
7. 因为 $2^a + \log_2 a < 2^{2b} + \log_2(2b) + 1 = 2^{2b} + \log_2(2b)$, 令 $f(x) = 2^x + \log_2 x$, 其中 $x > 0$, 因为函数 $y = 2^x$ 、 $y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上均为增函数, 所以, 函数 $f(x) = 2^x + \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 因为 $2^a + \log_2 a < 2^{2b} + \log_2(2b)$, 即 $f(a) < f(2b)$, 故 $2b > a > 0$, 则 $2b - a > 0$, 所以, $2b - a + 1 > 1$, 则 $\ln(2b - a + 1) > \ln 1 = 0$, B 错 A 对; 无法确定 $|a - 2b|$ 与 1 的大小, 故 $\ln|a - 2b|$ 与 0 的大小无法确定, CD 都错, 故选 A.
8. 构造函数 $F(x) = \frac{f(x)+1}{e^x}$, 则 $F'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^x - [f(x)+1] \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - f(x) - 1}{e^x}$, 因为 $f'(x) - f(x) < 1$, 所以 $F'(x) < 0$ 恒成立, 故 $F(x) = \frac{f(x)+1}{e^x}$ 单调递减, $f(x)+1 > 2023e^x$ 变形为 $\frac{f(x)+1}{e^x} > 2023$, 又 $f(0) = 2022$, 所以 $F(0) = \frac{f(0)+1}{e^0} = 2023$, 所以 $F(x) > F(0)$, 解得: $x < 0$, 故选 B.

二、多项选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分)

题号	9	10	11	12
答案	BD	CD	ABC	AD

【解析】

9. 由题意知 A_1, A_2, A_3 两两互斥, 故 D 正确; 又 $P(A_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $P(A_2) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, $P(A_3) = \frac{3}{10}$, $P(B|A_1) = \frac{5}{11}$, $P(B|A_2) = \frac{4}{11}$, $P(B|A_3) = \frac{4}{11}$, 故 B 正确; $P(B) = P(A_1B) + P(A_2B) + P(A_3B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{11} + \frac{1}{5} \times \frac{4}{11} + \frac{3}{10} \times \frac{4}{11} = \frac{9}{22}$, 故 A 错误; 因为 $P(BA_1) = P(B|A_1)P(A_1) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{11} = \frac{5}{22} \neq P(B)P(A_1)$, 所以 B 与 A_1 不是相互独立事件, 故 C 错误, 故选 BD.

数学参考答案 · 第 2 页 (共 9 页)

□ ■ ■ ■ □ □ □

10. 数列 $\{a_n\}$ 各项乘以 10 后再减 4 得到数列 $\{b_n\}$: 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, ..., 故该数列从

第 2 项起构成公比为 2 的等比数列, 所以 $b_n = \begin{cases} 0, & n=1, \\ 3 \times 2^{n-2}, & n \geq 2, \end{cases}$ 数列 $\{b_n\}$ 的第 2023 项为

3×2^{2021} , 故 A 错误; 从而 $a_n = \frac{b_n + 4}{10} = \begin{cases} 0.4, & n=1, \\ 0.3 \times 2^{n-2} + 0.4, & n \geq 2, \end{cases}$ 故 B 错误; 当 $n=1$ 时,

$S_1 = a_1 = 0.4$; 当 $n \geq 2$ 时, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0.4 + 0.3(2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-2}) + 0.4(n-1)$

$= 0.4n + 0.3 \times \frac{1-2^{n-1}}{1-2} = 0.4n + 0.3 \times 2^{n-1} - 0.3$, 当 $n=1$ 时, $S_1 = 0.4$ 也符合上式, 所以

$S_n = 0.4n + 0.3 \times 2^{n-1} - 0.3$, $S_{10} = 4 + 0.3 \times 2^9 - 0.3 = 157.3$, 故 C 正确; 因为

$nb_n = \begin{cases} 0, & n=1, \\ 3n \times 2^{n-2}, & n \geq 2, \end{cases}$ 所以当 $n=1$ 时, $T_1 = b_1 = 0$, 当 $n \geq 2$ 时, $T_n = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots$

$+ nb_n = 0 + 3(2 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 4 \times 2^2 + \dots + n \times 2^{n-2})$, $2T_n = 3(2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \dots + n \times$

$2^{n-1})$, 所以 $-T_n = 0 + 3(2 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-2} - n \times 2^{n-1}) = 3 \left(2 + \frac{2-2^{n-1}}{1-2} - n \times 2^{n-1} \right) =$

$3(1-n) \times 2^{n-1}$, 所以 $T_n = 3(n-1) \times 2^{n-1}$, 又当 $n=1$ 时 $T_1 = 0$ 也满足上式, 所以

$T_n = 3(n-1) \times 2^{n-1}$, 故 D 正确, 故选 CD.

11. 对于 A, 令 $x=y=0$, 得 $f(0)-f(0)=f(0)=0$, 故 A 正确; 对于 B, 令 $y=-x$ 得:

$f(x)-f(-x) = f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ (1), 再以 $-x$ 代 x , 得: $f(-x)-f(x) = f\left(\frac{-2x}{1+x^2}\right)$ (2), (1) +

(2) 得: $f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + f\left(\frac{-2x}{1+x^2}\right) = 0$, $\therefore f\left(\frac{-2x}{1+x^2}\right) = -f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$, \therefore 定义在 $(-1, 1)$ 上的函数

$f(x)$ 为奇函数, 故 B 正确; 对于 C, \because 函数 $f(x)$ 为定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数, 且当

$x \in (-1, 0)$ 时, $f(x) < 0$, 不妨设 $-1 < x_1 < x_2 < 1$, 则 $f(x_1) - f(x_2) = f\left(\frac{x_1 - x_2}{1 - x_1 x_2}\right)$, 因为

$-1 < x_1 < x_2 < 1$, 所以 $\frac{x_1 - x_2}{1 - x_1 x_2} < 0$ 且 $\frac{x_1 - x_2}{1 - x_1 x_2} + 1 = \frac{(1 + x_1)(1 - x_2)}{1 - x_1 x_2} > 0$, 因此 $-1 < \frac{x_1 - x_2}{1 - x_1 x_2} < 0$,

所以 $f\left(\frac{x_1 - x_2}{1 - x_1 x_2}\right) < 0$, 则 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$, 故函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上为

增函数, C 正确; 对于 D, 令 $x = \frac{7}{8}$, $y = \frac{2}{3}$, 因为 $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)$, 则

$f\left(\frac{7}{8}\right) - f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$, 即 $f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{7}{8}\right)$, 因为 $\frac{7}{8} > \frac{7}{9}$, 且函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上

□ ■ ■ ■ □ □ □

为增函数, 所以 $f\left(\frac{7}{8}\right) > f\left(\frac{7}{9}\right)$, 即 $f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{7}{8}\right) > f\left(\frac{7}{9}\right)$, 故 D 错误, 故选 ABC.

12. 因为双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, 所以 $a=4, b=3, c=5$, 渐近线方程为 $y = \pm \frac{3}{4}x$, 选

项 A, 因为直线 PF_2 与双曲线有两个交点, 所以 $k \in \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$, 即 A 正确; 选项 B, 由双

曲线的定义知, $|PF_1| - |PF_2| = 2a = 8$, 若 $m \perp n$, 则 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2 = (2c)^2$

$= 100$, 因为 $(|PF_1| - |PF_2|)^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2|$, 所以

$64 = 100 - 2|PF_1| \cdot |PF_2|$, 解得 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 18$, 即 B 错误; 选项 C: $|PF_2| + |PQ| =$

$|F_1Q| + 2|PQ| - 2a = 5 + 2|PQ| > 5$, 即 C 错误; 选项 D, 因为 PT 平分 $\angle F_1PF_2$, 由角分线

定理知, $\frac{|PF_1|}{|TF_1|} = \frac{|PF_2|}{|TF_2|}$, 所以 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|TF_1|}{|TF_2|} = \frac{5+1}{5-1} = \frac{3}{2}$, 又 $|PF_1| - |PF_2| = 8$, 所以

$\frac{3}{2}|PF_2| - |PF_2| = 8$, 解得 $|PF_2| = 16$, 即 D 正确, 故选 AD.

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

题号	13	14	15	16
答案	-480	$\frac{1}{2}$	$\left(1, \frac{2}{e} + 1\right)$	$\frac{16}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$

【解析】

13. $(x-2y+1)^6$ 的展开式中为 x^2y^3 项为 $C_6^2x^2C_4^3(-2y)^3 = -480x^2y^3$.

14. 令 $4x-1=1$, 即 $x=\frac{1}{2}$, 得 $y=2$, 故 $P\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, 由 $P\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 在直线 $l: ax+by-3=0 (b>0)$

上, 得 $\frac{1}{2}a+2b-3=0$, 即 $a+2+4b=8$, 因为 $a>0$ 且 $a \neq 1, b>0$, 所以 $a+2>2$, 所以

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{4b} = \left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{4b}\right)(a+2+4b) \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \left(2 + \frac{4b}{a+2} + \frac{a+2}{4b}\right) \geq \frac{1}{8} \left(2 + 2\sqrt{\frac{4b}{a+2} \cdot \frac{a+2}{4b}}\right) = \frac{1}{2}$$

当且仅当 $\frac{4b}{a+2} = \frac{a+2}{4b}$, 即 $a+2=4b=4$, 即 $a=2, b=1$ 时, 等号成立.

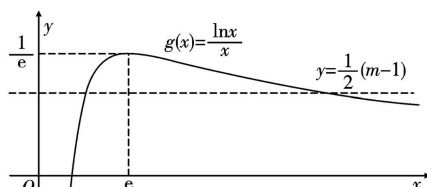
15. 由 $f(x) = x \ln x - \frac{1}{4}(m-1)x^2 - x + 1$, 得 $f'(x) = \ln x - \frac{1}{2}(m-1)x$, $x > 0$. 要使

$f(x) = x \ln x - \frac{1}{4}(m-1)x^2 - x + 1$ 有两个极值点, 只需 $f'(x) = \ln x - \frac{1}{2}(m-1)x$ 有两个变号根,

□ ■ ■ ■ □ □ □

即 $\frac{1}{2}(m-1) = \frac{\ln x}{x}$ 有两个变号根. 令 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ ($x > 0$), 则 $g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, 由 $g'(x) = 0$ 得 $x = e$, 易知当 $x \in (0, e)$ 时, $g'(x) > 0$, 此时 $g(x)$ 单调递增; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, 此时 $g(x)$ 单调递减. 所以 $g(x)_{\max} = g(e) = \frac{1}{e}$,

而 $g\left(\frac{1}{e}\right) = -e < 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $g(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $g(x) > 0$, 作出 $y = g(x)$, $y = \frac{1}{2}(m-1)$



的图象如图 1, 可知: $0 < \frac{1}{2}(m-1) < \frac{1}{e}$, 解得

$$1 < m < \frac{2}{e} + 1. \text{ 故答案为 } \left(1, \frac{2}{e} + 1\right).$$

图 1

16. 记第 n 个图形为 P_n , 边长为 a_n , 边数为 b_n , 周长为 L_n , 面积为 S_n , P_1 有 b_1 条边, 边长 a_1 ;

P_2 有 $b_2 = 4b_1$ 条边, 边长 $a_2 = \frac{1}{3}a_1$; P_3 有 $b_3 = 4^2b_1$ 条边, 边长 $a_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 a_1$; ……分析可知

$a_n = \frac{1}{3}a_{n-1}$, 即 $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} a_1$; $b_n = 4b_{n-1}$, 即 $b_n = b_1 \cdot 4^{n-1}$. 当第 1 个图中的三角形的边长为

1 时, 即 $a_1 = 1$, $b_1 = 3$, 所以 $L_n = a_n b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times 3 \times 4^{n-1} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$, 当 $n = 3$ 时,

$L_3 = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{3-1} = \frac{16}{3}$. 由图形可知 P_n 是在 P_{n-1} 每条边上生成一个小三角形, 即

$S_n = S_{n-1} + b_{n-1} \times \frac{\sqrt{3}}{4} a_n^2$, ($n \geq 2$), 即 $S_n - S_{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times a_n^2 \cdot b_{n-1}$, $S_{n-1} - S_{n-2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times a_{n-1}^2 \cdot b_{n-2}$,

…., $S_2 - S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times a_2^2 \cdot b_1$, 利用累加法可得 $S_n - S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} (a_n^2 \cdot b_{n-1} + a_{n-1}^2 \cdot b_{n-2} + \dots + a_2^2 \cdot b_1)$,

数列 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 是以 4 为公比的等比数列, 故 $\{a_n^2 \cdot b_{n-1}\}$ 是以

$\frac{4}{9}$ 为公比的等比数列, 当第 1 个图中的三角形的边长为 1 时, $S_1 = \frac{1}{2} a_1^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$,

$$a_1^2 = 1, a_2^2 = \frac{1}{9}, P_1 \text{ 有 } b_1 = 3 \text{ 条边, 则 } a_n^2 \cdot b_{n-1} + a_{n-1}^2 \cdot b_{n-2} + \dots + a_2^2 \cdot b_1 = \frac{a_2^2 \cdot b_1 \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)}{1 - \frac{4}{9}}$$

□ ■ ■ ■ □ □ □

$$= \frac{\frac{1}{9} \times 3 \left(1 - \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1} \right)}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{3}{5} \times \left(1 - \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1} \right), \text{ 所以 } S_n - S_1 = \frac{3\sqrt{3}}{20} \times \left(1 - \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1} \right), \text{ 所以}$$

$$S_n = \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1}, S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ 也满足上式.}$$

四、解答题 (共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

(1) 证明: 由题意知: $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2-a_n}{a_n} = 2 \cdot \frac{1}{a_n} - 1, \frac{1}{a_{n+1}} - 1 = 2 \left(\frac{1}{a_n} - 1 \right),$

所以数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} - 1 \right\}$ 是以 2 为公比, $\frac{1}{a_1} - 1 = 2$ 为首项的等比数列.

..... (5 分)

(2) 解: 由 (1) 知 $\frac{1}{a_n} - 1 = 2^n \Rightarrow \frac{1}{a_n} = 2^n + 1,$

所以 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{2(1-2^n)}{1-2} + n = 2^{n+1} + n - 2,$

记 $f(n) = 2^{n+1} + n - 2,$ 显然 $f(n)$ 为递增数列, 又 $f(9) = 1031, f(10) = 2056,$

所以最大整数 $n = 9.$ (10 分)

18. (本小题满分 12 分)

解: (1) 由题意可得, $\bar{x} = 3, \bar{y} = 2, \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 4.8, \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 10,$

设 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a},$ 则 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = 0.48,$

$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 2 - 0.48 \times 3 = 0.56, \therefore y$ 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = 0.48x + 0.56.$

..... (6 分)

(2) 零假设为 $H_0:$ 两个店的顾客购买率无差异, 则

由题意可知 2×2 列联表如表所示:

	购买	不购买	合计
分店一	180	120	300
分店二	150	50	200
合计	330	170	500

..... (8 分)

□ ■ ■ ■ □ □ □

$$\therefore \chi^2 = \frac{500(180 \times 50 - 150 \times 120)^2}{300 \times 200 \times 330 \times 170} \approx 12.032 > 10.828,$$

∴ 根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验，没有充分证据推断 H_0 成立，

即两个店的顾客购买率有差异，且推断犯错的概率不超过 0.001.

..... (12 分)

19. (本小题满分 12 分)

(1) 证明：因为 E, F 为圆弧 AB 上的两个三等分点，所以 $EF \parallel AB \Rightarrow EF \parallel$ 平面 $ABCD$,

同理 $EH \parallel$ 平面 $ABCD$ ，又 $EF \cap EH = E$ ，所以平面 $ABCD \parallel$ 平面 $EFGH$ ，

又平面 $\alpha \cap$ 平面 $ABCD = CP$ ，平面 $\alpha \cap$ 平面 $EFGH = MQ$ ，所以 $CP \parallel MQ$.

..... (6 分)

(2) 解：不妨取圆柱底面半径为 2，如图 2，以 O 为坐标原点，过点 O

作 x 轴 $\perp OB$ ， OB 为 y 轴， OO' 为 z 轴建立空间直角坐标系，则：

$$F(\sqrt{3}, 1, 0), E(\sqrt{3}, -1, 0), A(0, -2, 0), C(0, 2, 4),$$

设 $AP = GQ = h(0 < h < 4)$,

$$\text{则 } P(0, -2, h), Q(\sqrt{3}, 1, 4-h), \overrightarrow{PC} = (0, 4, 4-h), \overrightarrow{QC} = (-\sqrt{3}, 1, h),$$

设平面 α 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 4y + (4-h)z = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{QC} = -\sqrt{3}x + y + hz = 0, \end{cases} \text{ 取 } \vec{n} = (5h-4, \sqrt{3}h-4\sqrt{3}, 4\sqrt{3}),$$

易得圆柱底面 O 的一个法向量为 $\vec{m} = (0, 0, 1)$,

$$\text{则 } \cos\langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7h^2 - 16h + 28}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7 \times \left(h - \frac{8}{7}\right)^2 + \frac{132}{7}}},$$

当 $h = \frac{8}{7}$ 时， $\cos\langle \vec{n}, \vec{m} \rangle$ 取得最大值为 $\frac{\sqrt{77}}{11}$,

所以平面 α 与圆柱底面 O 所成夹角的正弦值的最小值为 $\frac{2\sqrt{11}}{11}$ (12 分)

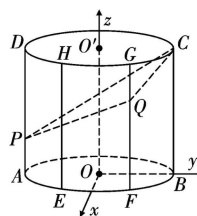


图 2

20. (本小题满分 12 分)

解：(1) 因为 $f'(x) = 6x^2 - 3$, $f'(0) = -3$, $f(0) = 0$,

所以在 $x = 0$ 处的切线方程为 $y = -3x$ (2 分)

(2) 设切点为 (x_0, y_0) , $f'(x_0) = 6x_0^2 - 3$, 则切线方程为 $y = 3(2x_0^2 - 1)x - 4x_0^3$,

又点 $P(-1, t)$ 在切线上，则 $t = -4x_0^3 - 6x_0^2 + 3$.

□ ■ ■ ■ □ □ □

令 $g(x_0) = -4x_0^3 - 6x_0^2 + 3$, $g'(x_0) = -12x_0^2 - 12x_0 = -12x_0(x_0 + 1)$,

则在 $(-\infty, -1)$, $(0, +\infty)$ 上, $g'(x_0) < 0$, $g(x_0)$ 递减;

在 $(-1, 0)$ 上, $g'(x_0) > 0$, $g(x_0)$ 递增.

$g(-1) = 1$, $g(0) = 3$, 所以 $t \in (1, 3)$ (7分)

(3) 过点 $A(0, 0)$, $B(-1, -1)$ 分别存在 1 条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切;

过点 $C(-1, 3)$, $D(1, -1)$ 分别存在 2 条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切;

过点 $E(1, -2)$ 存在 3 条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切. (12分)

21. (本小题满分 12 分)

(1) 解: 由题意可知 $a_1 = \frac{1}{3}$, $b_1 = \frac{2}{3}$, (2分)

从而 $a_2 = \frac{1}{3}a_1 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}b_1 = \frac{1}{3}$, $b_2 = \frac{2}{3}a_1 + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right)b_1 = \frac{5}{9}$ (4分)

(2) 证明: 由题意知 $P(X_n = 2) = a_n$, $P(X_n = 1) = b_n$, $P(X_n = 0) = 1 - a_n - b_n$,

由全概率公式得: $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}b_n + 0 \times (1 - a_n - b_n) = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n$, ①

$b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right)b_n + 1 \times (1 - a_n - b_n) = -\frac{1}{3}a_n - \frac{1}{2}b_n + 1$, ②

① \times 2+②得:

$$2a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n + 1 = \frac{1}{6}(2a_n + b_n) + 1 \Rightarrow 2a_{n+1} + b_{n+1} - \frac{6}{5} = \frac{1}{6}\left(2a_n + b_n - \frac{6}{5}\right),$$

即: $\frac{2a_{n+1} + b_{n+1} - \frac{6}{5}}{2a_n + b_n - \frac{6}{5}} = \frac{1}{6}$,

即 $\left\{2a_n + b_n - \frac{6}{5}\right\}$ 是以 $\frac{1}{6}$ 为公比, 以 $2a_1 + b_1 - \frac{6}{5} = \frac{2}{15}$ 为首项的等比数列.

..... (8分)

(3) 解: 由 (2) 知: $2a_n + b_n - \frac{6}{5} = \frac{2}{15} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$,

所以 $E(X_n) = 2a_n + b_n + 0 \times (1 - a_n - b_n) = \frac{2}{15} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{6}{5}$ (12分)



22. (本小题满分 12 分)

(1) 解: 直线 $l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{p}{2}\right)$, 联立抛物线方程得: $x^2 - 7px + \frac{p^2}{4} = 0$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 所以 $x_1 + x_2 = 7p$, 则 $|AB| = x_1 + x_2 + p = 8p = 16 \Rightarrow p = 2$,

所以抛物线 C 的标准方程为 $y^2 = 4x$, 准线方程为 $x = -1$ (6 分)

(2) 证明: 设直线 $l: x = my + 1$, 则 $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ x = my + 1 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 4my - 4 = 0$,

所以 $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4$,

又 $k_{OA} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{4}{y_1}$, $l_{OA}: y = \frac{4}{y_1}x$, 所以 $M\left(-2, \frac{-8}{y_1}\right)$, 同理 $N\left(-2, \frac{-8}{y_2}\right)$,

设圆上任意一点为 $P(x, y)$, 则圆的方程为: $(x+2)^2 + \left(y + \frac{8}{y_1}\right)\left(y + \frac{8}{y_2}\right) = 0$,

化解得: $(x+2)^2 + y^2 + 8\left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\right)y + \frac{64}{y_1 y_2} = (x+2)^2 + y^2 - 8my - 16 = 0$,

令 $y = 0 \Rightarrow x = 2$ 或 $x = -6$, 所以以 MN 为直径的圆过定点 $(2, 0)$ 和 $(-6, 0)$.

..... (12 分)



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注自主选拔在线官方微信号: [zizzsw](https://www.zizzs.com)。



微信搜一搜

自主选拔在线

