

大庆市高三年级第三次教学质量检测试题

数 学

2023.04

本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、班级、考场填写在答题卡上，认真核对条形码上的姓名、准考证号，并将条形码粘贴在答题卡的指定位置上。
2. 选择题答案使用 2B 铅笔填涂，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案的标号；非选择题答案使用 0.5 毫米中性（签字）笔或碳素笔书写，字体工整，笔迹清楚。
3. 请按照题号在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效。
4. 保持卷面及答题卡清洁，不折叠，不破损。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $z = \frac{2+i}{1+3i}$ 的虚部是
A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}i$ D. $-\frac{1}{2}i$
2. 若集合 $A = \{x | \log_2 x < 2\}$, $B = \{x | x \geq 2\}$, 则 $A \cap B =$
A. $[2, 4)$ B. $(2, 4]$ C. \emptyset D. $[2, 4)$
3. 定义 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $a_3 = 1$, $\begin{vmatrix} a_6 & 8 \\ 8 & a_2 \end{vmatrix} = 0$, 则 $a_7 =$
A. 4 B. ± 4 C. 8 D. ± 8
4. 已知向量 $\vec{a} = (\sin \alpha, 3)$, $\vec{b} = (\cos \alpha, 1)$, 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha} =$
A. 3 B. 6 C. -3 D. -6

5. 已知直线 l 是圆 $C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ 的切线, 并且点 $B(3,4)$ 到直线 l 的距离是 2, 这样的直线 l 有

- A. 1条 B. 2条 C. 3条 D. 4条

6. 如图 1, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=4$, $AA_1=1$, M 为 A_1B_1 的中点, P 为底面 $ABCD$ 上一点, 若直线 D_1P 与平面 BMC_1 没有交点, 则 $\triangle D_1DP$ 面积的最小值为

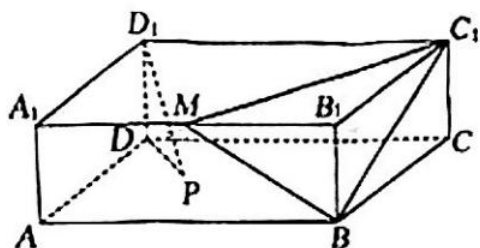


图1

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

7. 函数 $f(x) = \frac{e^x(2x-1)}{x-1}$, 则方程 $f(x) = 4e$ 解的个数为

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

8. 已知 $a = e^{-3}$, $b = \ln 1.02$, $c = \sin 0.04$, 则

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $c < b < a$ D. $b < a < c$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项是符合题目要求的, 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 已知事件 A, B 满足 $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$, 则

- A. 若 $A \subseteq B$, 则 $P(AB) = 0.18$ B. 若 A 与 B 互斥, 则 $P(A+B) = 0.9$
C. 若 $P(A|B) = 0.1$, 则 A 与 B 相互独立 D. 若 A 与 B 相互独立, 则 $P(\overline{A\overline{B}}) = 0.12$

10. 筒车是我国古代发明的一种水利灌溉工具，既经济又环保，明朝科学家徐光启在《农政全书》中用图画描绘了筒车的工作原理，如图2. 假定在水流量稳定的情况下，筒车上的每一个盛水桶都做匀速圆周运动. 为研究筒车的运动情况，将筒车抽象为一个以原点为圆心 R 为半径的圆，某盛水桶抽象为圆上的点 P ，如图3. 设筒车按逆时针方向每旋转一周用时100秒，当点 P 位于初始点 $P_0(2, -2\sqrt{3})$ 时记为 $t=0$ 秒，在筒车旋转 t 秒的过程中，点 $P(x, y)$ 的纵坐标满足 $y = f(t) = R \sin(\omega t + \varphi) (t \geq 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ ，则下列叙述正确的是

- A. 筒车转动的角速度 $\omega = \frac{\pi}{50}$
 B. 当 $t=75$ 秒时，点 P 的纵坐标为 -2
 C. 当 $t=75$ 秒时，点 P 和初始点 P_0 的距离为 4
 D. 当 $0 < t \leq 30$ 秒时，点 P 距离 x 轴的最大值为 4



图2

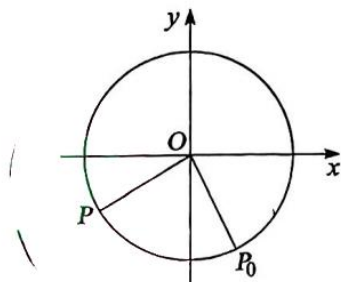


图3

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 ，渐近线方程为 $2x \pm y = 0$ ， M 为双曲线 E 上任意一点， MN 平分 $\angle F_1MF_2$ ，且 $\overrightarrow{F_1N} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ ， $|ON| = 2$ ，则
- A. 双曲线的离心率为 $\sqrt{5}$
 B. 双曲线的标准方程为 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$
 C. 点 M 到两条渐近线的距离之积为 $\frac{16}{5}$
 D. 若直线 MF_1 与双曲线 E 的另一个交点为 P ， Q 为 MP 的中点，则 $k_{OQ} \times k_{PM} = 4$

12. 勒洛四面体是一个非常神奇的“四面体”，它能在两个平行平面间自由转动，并且始终保持与两平面都接触。勒洛四面体是以正四面体的四个顶点为球心，以正四面体的棱长为半径的四个球的相交部分围成的几何体。若用棱长为4的正四面体 $ABCD$ 作勒洛四面体，如图4，则下列说法正确的是

- A. 平面 ABC 截勒洛四面体所得截面的面积为 $8\pi - 8\sqrt{3}$
- B. 记勒洛四面体上以 C, D 为球心的两球球面交线为弧 AB ，则其长度为 $\frac{4\pi}{3}$
- C. 该勒洛四面体表面上任意两点间距离的最大值为4
- D. 该勒洛四面体能够容纳的最大球的半径为 $4 - \sqrt{6}$

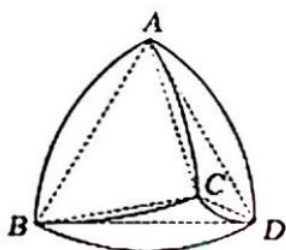


图4

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 曲线 $f(x) = \ln x + \frac{2}{x}$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线方程为_____。

14. 某校学生参与“保护地球”知识问答活动，满分20分，根据学生的作答成绩绘制的频率分布直方图如图5所示，请据此估计学生成绩的第60百分位数为_____。

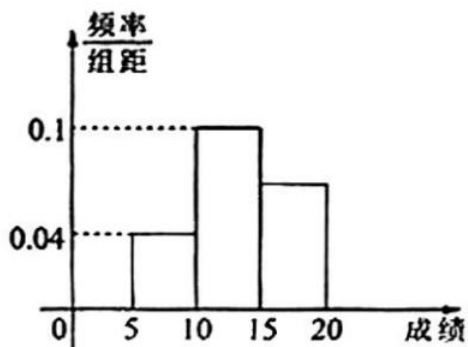


图5

15. 已知函数 $f(x) = \frac{3e^x}{1+e^x}$ ，则 $f(x) + f(-x) =$ _____；若 $\forall x \in (0, +\infty)$ ，不等式 $f(4-ax) + f(x^2) \geq 3$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_____。

16. 古希腊数学家阿波罗尼阿斯与欧几里得、阿基米德齐名，他的著作《圆锥曲线论》是古代数学光辉的科学成果。他发现“平面内到两个定点 A, B 的距离之比为定值 λ ($\lambda > 0$ 且 $\lambda \neq 1$) 的点的轨迹是圆”，人们将这样的圆称为阿波罗尼斯圆，简称阿氏圆。在平面直角坐标系中，已知 $A(0,1), B(0,2), C(-\sqrt{2},2)$ ， Q 为抛物线 $y^2 = 4\sqrt{2}x$ 上的动点，点 Q 在直线 $x = -\sqrt{2}$ 上的射影为 H ， M 为圆 $(x+\sqrt{2})^2 + y^2 = 2$ 上的动点。若点 P 的轨迹是到 A, B 两点的距离之比为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的阿氏圆，则 $\frac{\sqrt{2}}{2}|MC| + |QH| + |QM|$ 的最小值为_____。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，

已知 $\sqrt{3}b = a(\sqrt{3}\cos C - \sin C)$ 。

(1) 求 A ；

(2) 若 $a = 8$ ， $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 $\sqrt{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长。

18. (本小题满分 12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + \dots + (2n-1)a_n = n$ 。

(1) 证明： $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是一个等差数列；

(2) 已知 $c_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数} \\ 19a_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} 。

19. (本小题满分 12 分) 如图 6，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB = BC = 4$ ， D 是 AC 中点， $\angle AA_1B_1 = \angle B_1BC$ 。

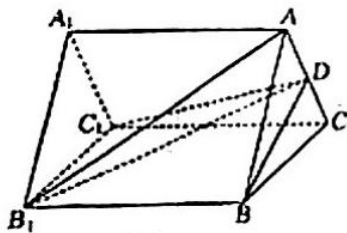


图 6

(1) 证明： $AA_1 \perp AC$ ；

(2) 若 $BB_1 \perp AB$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，且三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $12\sqrt{3}$ ，求二面角 $B-B_1D-C_1$ 的余弦值。

20. (本小题满分 12 分) 天宫空间站是我国建成的国家级太空实验室, 由天和核心舱、问天实验舱和梦天实验舱组成, 已经开启长期有人驻留模式. 结合空间站的相关知识, 某职业学校的老师设计了以空间站为主题的编程训练, 训练内容由“太空发射”、“自定义漫游”、“全尺寸太阳能”、“空间运输”等 10 个相互独立的编程题目组成, 训练要求每个学生必须选择两个不同的题目进行编程练习, 并且学生间的选择互不影响. 老师将班级学生分成四组, 指定甲、乙、丙、丁为组长.

- (1) 求甲、乙、丙、丁这四个人中至少有一人选择“太空发射”的概率;
- (2) 记 X 为这四个人中选择“太空发射”的人数, 求 X 的分布列及数学期望;
- (3) 如果班级有 n 个学生参与编程训练 (其中 n 是能被 5 整除的正整数), 则这 n 个学生中选择“太空发射”的人数最有可能是多少人?

21. (本小题满分 12 分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 e , 且过 $(2, 0)$, $(1, e)$

两点.

- (1) 求椭圆 E 的方程;
- (2) 若经过 $M(1, 0)$ 有两条直线 l_1, l_2 , 它们的斜率互为倒数, l_1 与椭圆 E 交于 A, B 两点, l_2 与椭圆 E 交于 C, D 两点, P, Q 分别是 AB, CD 的中点. 试探究: $\triangle OPQ$ 与 $\triangle MPQ$ 的面积之比是否为定值? 若是, 请求出此定值; 若不是, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = e^{ax}(\ln x + b)$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$.

- (1) 若 $\forall b \in \mathbb{R}$, $f(x)$ 有且仅有一个极值点, 求实数 a 的取值范围;
- (2) 是否存在 $a, b \in \mathbb{R}$, $x_0 > 0$, 使得 x_0 是 $f(x)$ 的极值点, 且满足 $f(x_0) \in [-e, 0]$. 若存在, 求出所有这样的 a, b ; 若不存在, 请说明理由.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

