

西城区高三模拟测试

数学参考答案

2020.6

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

1. D                      2. A                      3. D                      4. C                      5. B  
6. B                      7. C                      8. B                      9. C                      10. B

二、填空题：本大题共 5 题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 30                                      12. 9, 5                                      13.  $4\sqrt{5}+4$   
14. 答案不唯一. 如  $m=3, n=1$     15. ① ②

注：第 12 题第一问 3 分，第二问 2 分；第 15 题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

16. (本小题满分 14 分)

解：(I) 如图，连接  $A_1B$ . 设  $A_1B \cap AB_1 = E$ ，并连接  $DE$ .

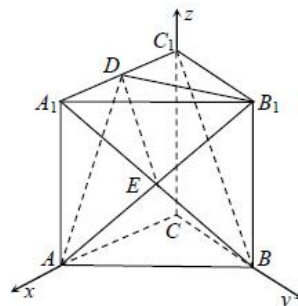
由三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$ ，得  $A_1E = BE$ . ..... 2 分

又因为  $D$  是  $A_1C_1$  的中点，

所以  $BC_1 \parallel DE$ . ..... 4 分

又因为  $BC_1 \not\subset$  平面  $AB_1D$ ， $DE \subset$  平面  $AB_1D$ ，

所以  $BC_1 \parallel$  平面  $AB_1D$ . ..... 6 分



(II) 因为  $CC_1 \perp$  底面  $ABC$ ， $AC \perp BC$ ，

所以  $CA$ ， $CB$ ， $CC_1$  两两垂直，故分别以  $CA$ ， $CB$ ， $CC_1$  为  $x$  轴， $y$  轴， $z$  轴，如图建立空间直角坐标系， ..... 7 分

则  $C(0,0,0)$ ， $B(0,2,0)$ ， $A(2,0,0)$ ， $B_1(0,2,2)$ ， $D(1,0,2)$ ，

所以  $\overrightarrow{AB_1} = (-2, 2, 2)$ ， $\overrightarrow{B_1D} = (1, -2, 0)$ ， $\overrightarrow{BC} = (0, -2, 0)$ ， ..... 8 分

设平面  $AB_1D$  的法向量  $n = (x, y, z)$ ,

$$\text{由 } \overrightarrow{AB_1} \cdot n = 0, \overrightarrow{B_1D} \cdot n = 0, \text{ 得 } \begin{cases} -2x + 2y + 2z = 0, \\ x - 2y = 0, \end{cases}$$

令  $y = 1$ , 得  $n = (2, 1, 1)$ . .....11 分

设直线  $BC$  与平面  $AB_1D$  所成的角为  $\theta$ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{BC}, n \rangle| = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot n|}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |n|} = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

所以直线  $BC$  与平面  $AB_1D$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ . ..... 14 分

17. (本小题满分 14 分)

解: (I) 若函数  $f(x)$  满足条件③,

$$\text{则 } f(0) = A \sin \varphi = -1.$$

这与  $A > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$  矛盾, 故  $f(x)$  不能满足条件③,

所以函数  $f(x)$  只能满足条件①, ②, ④. .... 2 分

$$\text{由条件①, 得 } \frac{2\pi}{|\omega|} = \pi,$$

又因为  $\omega > 0$ , 所以  $\omega = 2$ . .... 4 分

由条件②, 得  $A = 2$ . .... 5 分

$$\text{由条件④, 得 } f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(-\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 0,$$

又因为  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , 所以  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ .

$$\text{所以 } f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right). \text{ ..... 8 分}$$

(II) 由  $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ , ..... 10 分

$$\text{得 } k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12}, \text{ ..... 12 分}$$

所以函数  $f(x)$  的单调递增区间为  $\left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$ . .... 14 分

(注: 单调区间写成开区间亦可.)

18. (本小题满分 14 分)

解: (I) 根据数据, 可得软件 A, B, C, D, E, F 的使用率  $t_A = \frac{91}{96} > 0.9$ ,  $t_B = \frac{84}{91} > 0.9$ ,

$$t_C = \frac{69}{85} < 0.9, \quad t_D = \frac{54}{74} < 0.9, \quad t_E = \frac{64}{69} > 0.9, \quad t_F = \frac{63}{65} > 0.9.$$

所以软件 A, B, E, F 为“有效下载软件”. ..... 2 分

记事件  $M$  为“在 6 款软件中任取 1 款, 该款软件是有效下载软件”, ..... 3 分

则事件  $M$  的概率  $P(M) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ . ..... 4 分

(II) 随机变量  $X$  的可能取值为 2, 3, 4. .... 5 分

则  $P(X=2) = \frac{C_4^2 C_2^2}{C_6^4} = \frac{2}{5}$ ,  $P(X=3) = \frac{C_4^3 C_2^1}{C_6^4} = \frac{8}{15}$ ,  $P(X=4) = \frac{C_4^4}{C_6^4} = \frac{1}{15}$ . .... 8 分

所以随机变量  $X$  的分布列为:

|     |               |                |                |
|-----|---------------|----------------|----------------|
| $X$ | 2             | 3              | 4              |
| $P$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{1}{15}$ |

..... 9 分

所以随机变量  $X$  的数学期望  $EX = 2 \times \frac{2}{5} + 3 \times \frac{8}{15} + 4 \times \frac{1}{15} = \frac{8}{3}$ . .... 10 分

(III) 不能认为大约有  $x\%$  的软件为“有效下载软件”. .... 12 分

理由如下:

若根据这 6 款软件中“有效下载软件”的概率来估计所有软件中“有效下载软件”的频率, 即是用样本估计总体.

用样本估计总体应保证总体中的每个个体被等可能抽取.

但此次调查是“从有视频会议需求的人群”中做调查, 且有针对性只选取“下载量排名前 6 名”的软件, 不是从所有软件中随机抽取 6 款作为样本.

故不能认为大约有  $x\%$  的软件为“有效下载软件”. .... 14 分

19. (本小题满分 15 分)

解: (I) 由  $f(x) = ax \ln x$ , 得  $f'(x) = a \ln x + a$ , ..... 2 分

则  $f(1)=0$ ,  $f'(1)=a$ .

所以曲线  $y=f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线为  $y=a(x-1)$ . ..... 4 分

将点  $(3, 2)$  代入切线方程, 得  $a=1$ . ..... 5 分

(II) 由题意, 得  $f(x)=x \ln x$ ,  $f'(x)=\ln x+1$ .

令  $f'(x)=0$ , 得  $x=\frac{1}{e}$ . ..... 7 分

随着  $x$  变化,  $f'(x)$  与  $f(x)$  的变化情况如下表所示:

|         |                    |               |                          |
|---------|--------------------|---------------|--------------------------|
| $x$     | $(0, \frac{1}{e})$ | $\frac{1}{e}$ | $(\frac{1}{e}, +\infty)$ |
| $f'(x)$ | -                  | 0             | +                        |
| $f(x)$  | ↘                  | 极小值           | ↗                        |

所以函数  $f(x)$  在  $(0, \frac{1}{e})$  上单调递减, 在  $(\frac{1}{e}, +\infty)$  上单调递增. .... 9 分

所以函数  $f(x)$  存在极小值, 且极小值为  $f(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$ ; 函数  $f(x)$  不存在极大值.

..... 10 分

(III) “ $f(x) > \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e}$ ” 等价于 “ $x \ln x - \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e} > 0$ ”. ..... 11 分

由 (II), 得  $f(x)=x \ln x \geq -\frac{1}{e}$  (当且仅当  $x=\frac{1}{e}$  时等号成立). ①

所以  $x \ln x - \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e} \geq \frac{1}{e} - \frac{x}{e^x}$ .

故只要证明  $\frac{1}{e} - \frac{x}{e^x} \geq 0$  即可 (需验证等号不同时成立). ..... 12 分

设  $g(x)=\frac{1}{e} - \frac{x}{e^x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ , 则  $g'(x)=\frac{x-1}{e^x}$ . ..... 13 分

因为当  $x \in (0, 1)$  时,  $g'(x)=\frac{x-1}{e^x} < 0$ ; 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $g'(x)=\frac{x-1}{e^x} > 0$ ,

所以函数  $g(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增.

所以  $g(x) \geq g(1) = 0$  (当且仅当  $x=1$  时等号成立). ②

因为①②两个不等式中的等号不同时成立,

所以当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $f(x) > \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e}$ . ..... 15 分

20. (本小题满分 14 分)

解: (I) 由题意, 得  $b=1$ ,  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . ..... 2 分

又因为  $a^2 = b^2 + c^2$ , ..... 3 分

所以  $a=2$ ,  $c=\sqrt{3}$ .

故椭圆  $E$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . ..... 5 分

(II)  $A(-2,0)$ ,  $B(2,0)$ .

设  $D(x_0, y_0)$  ( $x_0 y_0 \neq 0$ ), 则  $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$ . ..... 6 分

所以直线  $CD$  的方程为  $y = \frac{y_0 - 1}{x_0} x + 1$ , ..... 7 分

令  $y=0$ , 得点  $P$  的坐标为  $(\frac{x_0}{1-y_0}, 0)$ . ..... 8 分

设  $Q(x_Q, y_Q)$ , 由  $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = 4$ , 得  $x_Q = \frac{4(1-y_0)}{x_0}$  (显然  $x_Q \neq 2$ ). ..... 9 分

直线  $AD$  的方程为  $y = \frac{y_0}{x_0 + 2}(x + 2)$ , ..... 10 分

将  $x_Q$  代入, 得  $y_Q = \frac{y_0(4-4y_0+2x_0)}{x_0(x_0+2)}$ , 即  $Q(\frac{4(1-y_0)}{x_0}, \frac{y_0(4-4y_0+2x_0)}{x_0(x_0+2)})$ .  
..... 11 分

故直线  $BQ$  的斜率存在, 且  $k_{BQ} = \frac{y_Q}{x_Q - 2} = \frac{y_0(4-4y_0+2x_0)}{(x_0+2)(4-4y_0-2x_0)}$  ..... 12 分

$$= \frac{2y_0 - 2y_0^2 + x_0 y_0}{4 - x_0^2 - 2x_0 y_0 - 4y_0}$$

$$= \frac{2y_0 - 2y_0^2 + x_0 y_0}{4y_0^2 - 2x_0 y_0 - 4y_0} = -\frac{1}{2}. \quad \text{..... 13 分}$$

又因为直线  $BC$  的斜率  $k_{BC} = -\frac{1}{2}$ ,

所以  $k_{BC} = k_{BQ}$ , 即  $C, B, Q$  三点共线. ..... 14 分



21. (本小题满分 14 分)

解: (I) 存在表 1, 使得  $b_{i,j} = 100 - i - j$ ; 不存在表 1, 使得  $b_{i,j}$  等于  $i + 2^{-j}$ . …… 3 分

(II) 因为对于任意的  $i = 1, 2, \dots, 39; j = 1, 2, \dots, 20$ , 都有  $b_{i,j} - b_{i+1,j} \geq 1$ ,

$$\text{所以 } b_{1,20} - b_{2,20} \geq 1, b_{2,20} - b_{3,20} \geq 1, \dots, b_{39,20} - b_{40,20} \geq 1,$$

$$\text{所以 } (b_{1,20} - b_{2,20}) + (b_{2,20} - b_{3,20}) + \dots + (b_{39,20} - b_{40,20}) \geq 39,$$

$$\text{即 } b_{1,20} \geq b_{40,20} + 39 = 40. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

又因为对于  $m = 1, 2, \dots, 40; n = 1, 2, \dots, 19$ , 都有  $b_{m,n} - b_{m,n+1} \geq 2$ ,

$$\text{所以 } b_{1,1} - b_{1,2} \geq 2, b_{1,2} - b_{1,3} \geq 2, \dots, b_{1,19} - b_{1,20} \geq 2,$$

$$\text{所以 } (b_{1,1} - b_{1,2}) + (b_{1,2} - b_{1,3}) + \dots + (b_{1,19} - b_{1,20}) \geq 38,$$

$$\text{所以 } b_{1,1} \geq b_{1,20} + 38 \geq 40 + 38 = 78.$$

$$\text{即 } b_{1,1} \geq 78. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

(III) 当表 1 如下图时:

|     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0   | 1   | 1   | ... | 1   | 1   |
| 0   | 1   | 1   | ... | 1   | 1   |
| 1   | 0   | 1   | ... | 1   | 1   |
| 1   | 0   | 1   | ... | 1   | 1   |
| 1   | 1   | 0   | ... | 1   | 1   |
| 1   | 1   | 0   | ... | 1   | 1   |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 1   | 1   | 1   | ... | 0   | 1   |
| 1   | 1   | 1   | ... | 0   | 1   |
| 1   | 1   | 1   | ... | 1   | 0   |
| 1   | 1   | 1   | ... | 1   | 0   |

其中, 每行恰好有 1 个 0 和 19 个 1; 每列恰好有 2 个 0 和 38 个 1; 因此每行的和均为 19. 符合题意.

重新排序后, 对应表 2 中, 前 38 行中每行各数均为 1, 每行的和均为 20; 后 2 行各数均为 0, 因此  $k \geq 39$ . …… 10 分

以下先证: 对于任意满足条件的表 1, 在表 2 的前 39 行中, 至少包含原表 1 中某一

行（设为第  $r$  行）的全部实数（即包含  $a_{r,1}, a_{r,2}, \dots, a_{r,20}$ ）。

假设表 2 的前 39 行中，不能包含原表 1 中任一行的全部实数。

则表 2 的前 39 行中至多含有表 1 中的  $40 \times 19 = 760$  个数，

这与表 2 中前 39 行中共有  $39 \times 20 = 780$  个数矛盾。

所以表 2 的前 39 行中，至少包含原表 1 中某一行（设为第  $r$  行）的全部实数。

..... 12 分

其次，在表 2 中，根据重排规则得：当  $i \geq 39$  时， $b_{i,j} \leq b_{39,j} \leq a_{r,j} (j=1,2,\dots,20)$ ，

所以  $b_{i,1} + b_{i,2} + \dots + b_{i,20} \leq a_{r,1} + a_{r,2} + \dots + a_{r,20} \leq 19$ 。

所以  $k \leq 39$ 。

综上， $k = 39$ 。

..... 14 分

## 关于我们

自主招生在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（<http://www.zizzs.com/>）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

### 关注后获取更多资料：

回复“**答题模板**”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“**必背知识点**”，即可获取《高考考前必背知识点》