

决胜新高考——2023 届高三年级大联考

数 学 答 案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 $(2-i)z=3+4i$ ，则 $z+\bar{z}=\quad$

A. 3

B. 4

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

【答案】D

2. 已知集合 $A=\left\{x\left|\lg x<\frac{1}{2}\right.\right\}$ ， $B=\{x|5x<16\}$ ，则 $A\cap B=\quad$

A. $\left\{x\left|0<x<\sqrt{10}\right.\right\}$

B. $\{x|x<\sqrt{10}\}$

C. $\left\{x\left|x<\frac{16}{5}\right.\right\}$

D. $\left\{x\left|0<x<\frac{16}{5}\right.\right\}$

【答案】A

3. 把分别标有 1 号、2 号、3 号、4 号的 4 个不同的小球放入分别标有 1 号、2 号、3 号的 3 个盒子中，没有空盒子且任意一个小球都不能放入标有相同标号的盒子中，则不同的放球方法种数为

A. 8

B. 12

C. 16

D. 20

【答案】B

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_4=4S_2$ ， $a_{2n}=2a_n+1$ 。设 $b_n=a_{a_n}$ ，则 $\frac{1}{b_1b_2}+\frac{1}{b_2b_3}$

$+\frac{1}{b_3b_4}+\cdots+\frac{1}{b_9b_{10}}=\quad$

A. $\frac{9}{37}$

B. $\frac{18}{37}$

C. $\frac{9}{19}$

D. $\frac{9}{38}$

【答案】A

5. 苏格兰数学家纳皮尔 (J. Napier, 1550-1617) 发明的对数及对数表 (如下表)，为当时的天文学家处理“大数”的计算大大缩短了时间。即就是任何一个正实数 N 可以表示成 $N=a\times 10^n$ ($1\leq a<10, n\in\mathbf{Z}$)，则 $\lg N=n+\lg a$ ($0\leq \lg a<1$)，这样我们可以知道 N 的位数。已知正整数 M^{31} 是 35 位数，则 M 的值为

N	2	3	4	5	11	12	13	14	15
$\lg N$	0.30	0.48	0.60	0.70	1.04	1.08	1.11	1.15	1.18

A. 3

B. 12

C. 13

D. 14

【答案】C

6. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右支交于点 A, B , 若

$$\cos \angle AOB = -\frac{7}{25}, \text{ 则 } C \text{ 的离心率为}$$

A. 2

B. $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{7}$

【答案】B

7. 若 $\tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2} = 1$, 则 $\cos \alpha + \cos \beta =$

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

8. 已知 $a = e^{-0.1}$, $b = \ln \frac{10e}{11}$, $c = 0.1^{0.1}$, 则

A. $b < c < a$

B. $c < b < a$

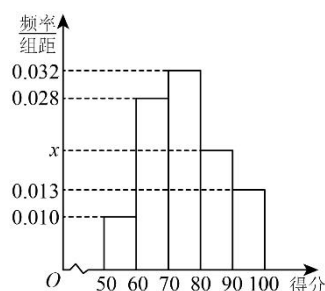
C. $c < a < b$

D. $a < c < b$

【答案】B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 某企业为普及法制教育，对本单位 1500 名员工开展了一次法律知识竞赛答题活动。现从中随机抽取 100 人的得分进行统计分析，整理得到如图所示的频率分布直方图，则根据该直方图，下列结论正确的是



A. 估计该企业 16% 的员工得分在区间 $[80, 90)$ 内

B. 该企业员工竞赛得分不小于 90 的人数估计为 195 人

C. 估计该企业员工的平均竞赛得分约为 74.5

D. 该企业员工竞赛得分的第 75 百分位数约为 83

【答案】BCD

10. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x - \sqrt{3} \cos \omega x$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π , 则

- A. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$
- B. 直线 $x = -\frac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴
- C. $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增
- D. 将 $f(x)$ 的图象上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 可得到 $y = 2\sin 2x$ 的图象

【答案】AB

11. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x) + f(1-x) = 6$, $f(2+x) = f(2-x) + 2x$, 则

- A. $f(1+x)$ 的图象关于 $(0, 3)$ 对称
- B. 4 是 $f(x)$ 的一个周期
- C. $f(1) = 3$
- D. $\sum_{i=1}^{21} f(i) = 273$

【答案】ACD

12. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l , 经过点 F 的直线与抛物线 C 相交 A, B 两点, A, B 在 l 上的射影分别为 A_1, B_1 , l 与 x 轴相交于点 M , 则下列说法正确的是

- A. $A_1F \perp B_1F$
- B. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} > 0$
- C. 若 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$, 则 $|\overrightarrow{AF}| = 3$
- D. 若 $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{QM}$, $|\overrightarrow{AM}| = 2|\overrightarrow{BQ}|$, 则 $AF - BF = 4$

【答案】ACD

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左, 右焦点, A 为 C 的上顶点, 过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D, E 两点, 则 $\triangle ADE$ 的周长为_____.

【答案】8

14. 若曲线 $y = x \ln x$ 有两条过 (e, a) 的切线, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, e)$

15. 在平面直角坐标系中, 两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 间的“曼哈顿距离”定义为

$\|P_1P_2\| = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, 则平面内与两定点 $F_1(-1, 0)$ 和 $F_2(1, 0)$ 的“曼哈顿距离”之和等于 4 的点的轨迹围成的面积为_____.

【答案】6

16. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 1, $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$, 将 $\triangle ADC$ 沿 AC 翻折, 当三棱锥 $D-ABC$ 表面积最大时, 其内切球表面积为_____.

【答案】 $(14 - 8\sqrt{3})\pi$

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $(b - \sqrt{3}c)\sin B + c\sin C = a\sin A$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, $\angle DBC = \frac{\pi}{2}$, $c = 6$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理,

得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, 其中, $2R$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆直径,

所以 $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$,

代入 $(b - \sqrt{3}c)\sin B + c\sin C = a\sin A$,

得 $b^2 - \sqrt{3}bc + c^2 = a^2$,2 分

由正弦定理, 得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

因为在 $\triangle ABC$ 中, $A \in (0, \pi)$,

所以 $A = \frac{\pi}{6}$4 分

(2) 设 $AD = x$, 由 $3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, 得 $CD = 2x$.

设 $\angle ABD = \theta$ ，则 $\angle ACB = \frac{\pi}{3} - \theta$ ， $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $BD = CD \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = 2x \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$ ，

在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理，

$$\text{得 } \frac{AD}{\sin \angle ABD} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}, \text{ 即 } \frac{x}{\sin \theta} = \frac{2x \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}{\sin \frac{\pi}{6}}, \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{整理得, } \sin \theta \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = \frac{1}{4},$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta = \frac{1}{4},$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta = \frac{1}{4},$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta = 1,$$

$$\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 1,$$

因为 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ ，

所以 $2\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ ，解得 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 。 \dots\dots 8 \text{ 分}

所以 $\angle ACB = \frac{\pi}{6}$ ， $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$

所以 $AC = AB = 6$ ，

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ 。 \dots\dots 10 \text{ 分}

18. (12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $S_n = 2a_n + 3$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 证明：数列 $\{a_n\}$ 中的任意不同的三项均不能构成等差数列。

解：(1) 令 $n = 1$ ，得 $a_1 = -3$ 。 \dots\dots 2 \text{ 分}

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_{n-1} = 2a_{n-1} + 3 \quad \text{①},$$

又 $S_n = 2a_n + 3$ ②,

①②两式相减, 得 $a_n = 2a_{n-1}$,

.....4 分

所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$.

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 -3 , 公比为 2 的等比数列,

所以 $a_n = -3 \times 2^{n-1}$.

.....6分

(2) 假设数列 $\{a_n\}$ 中存在三项数列 a_m, a_k, a_p (其中 $m < k < p$) 成等差数列, 则

$2a_k = a_m + a_p$,

.....8 分

由 (1) 得 $2 \times (-3) \times 2^{k-1} = (-3) \times 2^{m-1} + (-3) \times 2^{p-1}$, 即 $2^k = 2^{m-1} + 2^{p-1}$,

两边同时除以 2^{m+1} , 得 $2^{k-m+1} = 1 + 2^{p-m} (*)$,

.....10 分

因为 $(*)$ 式左边为奇数, 右边为偶数,

所以 $(*)$ 式不成立, 假设不成立.

所以数列 $\{a_n\}$ 中得任意不同的三项均不能构成等差数列.

.....12 分

19. (12 分)

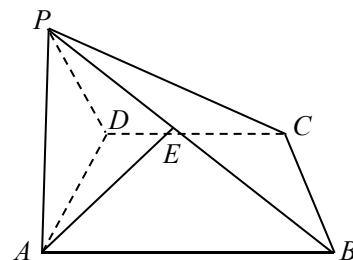
在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \parallel CD$,

$AB = 2$, $AD = DC = CB = 1$, $PA = PD = \sqrt{2}$.

(1) 设平面 PAB 与平面 PCD 的交线为 l ,

求证: $l \parallel$ 平面 $ABCD$;

(2) 点 E 在棱 PB 上, 直线 AE 与平面 $ABCD$ 所成角为



$\frac{\pi}{6}$ ，求点 E 到平面 PCD 的距离.

解：(1) 因为 $AB \parallel CD$ ， $AB \not\subset$ 平面 PCD ， $CD \subset$ 平面 PCD ，

所以 $AB \parallel$ 平面 PCD .

.....2 分

又因为 $AB \subset$ 平面 PAB ，平面 $PAB \cap$ 平面 $PCD = l$ ，

所以 $AB \parallel l$.

因为 $l \not\subset$ 平面 $ABCD$ ， $AB \subset$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $l \parallel$ 平面 $ABCD$.

.....4 分

(2) 设 O 为 AD 的中点，

因为 $PA = PD$ ，

所以 $PO \perp AD$.

又因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，

平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$ ，

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$ ，

又 $BC \subset$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $PO \perp BC$.

由 $AB = 2$ ， $AD = DC = CB = 1$ ， $AB \parallel CD$ ，

可知 $ABCD$ 四边形为等腰梯形，得 $BD = \sqrt{3}$ ，

所以 $AD^2 + BD^2 = AB^2$ ，

所以 $AD \perp BD$.

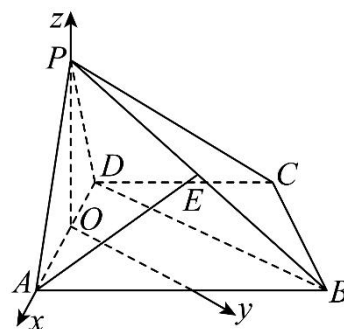
.....6 分

建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$ ，则

$$P\left(0, 0, \frac{\sqrt{7}}{2}\right), A\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), B\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}, 0\right), C\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),$$

$$D\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right),$$

设平面 $ABCD$ 的法向量为 $\vec{n} = (0, 0, 1)$ ，



设 $E = (x, y, z)$, 则 $\overrightarrow{AE} = \left(x - \frac{1}{2}, y, z\right)$,

$$\overrightarrow{PE} = \left(x, y, z - \frac{\sqrt{7}}{2}\right), \quad \overrightarrow{PB} = \left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right),$$

因为直线 AE 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\frac{\pi}{6}$,

$$\text{所以 } \sin \frac{\pi}{6} = \left| \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AE} \rangle \right| = \frac{|z|}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - 3z^2 = 0 \quad ①$$

因为点 E 在棱 PB 上,

$$\text{所以 } \overrightarrow{PE} = \lambda \overrightarrow{PB} \quad (0 < \lambda < 1),$$

$$\text{即 } \left(x, y, z - \frac{\sqrt{7}}{2}\right) = \lambda \left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right),$$

$$\text{所以 } x = -\frac{\lambda}{2}, \quad y = \sqrt{3}\lambda, \quad z = \frac{\sqrt{7}}{2}(1 - \lambda)$$

代入①解得 $\lambda = \frac{1}{2}$ 或 $\lambda = 5$ (舍去).

.....8 分

$$\overrightarrow{PE} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{4}\right), \quad \overrightarrow{PD} = \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{PC} = \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right),$$

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 则

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PD} = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{7}}{2}z_1 = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{PC} = -x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 - \frac{\sqrt{7}}{2}z_1 = 0, \end{cases}$$

令 $z_1 = 1$, 得 $x_1 = -\sqrt{7}$, $y_1 = -\frac{\sqrt{21}}{3}$,

所以 $\vec{m} = \left(-\sqrt{7}, -\frac{\sqrt{21}}{3}, 1\right)$,10 分

所以点 E 到平面 PCD 的距离

$$d = \frac{|\overrightarrow{PE} \cdot \vec{m}|}{|\vec{m}|} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{\frac{31}{3}}} = \frac{\sqrt{\frac{21}{31}}}{2} = \frac{\sqrt{651}}{62}.$$
12 分

20. (12 分)

为了进一步深入开展打造“书香校园”活动,让读书成为每位师生的习惯,努力培育师生人文素养,让阅读成为学校、家庭、社会的一种良好风气,现对我校 60 名师生阅读喜好进行调查,其中教师与学生的人数之比为 1:2,教师中喜欢读文学类的人数占 $\frac{1}{2}$,学生中喜欢文学类的占 $\frac{3}{4}$,得到下面的列联表:

	教师	学生	合计
文学类			
理工类			
合计			

(1) 请将列联表补充完整,判断数据能否有 90% 的把握认为教师与学生的阅读喜好存在差异.

(2) 若从学校随机抽取 11 人,用样本的频率估计概率,预测 11 人中喜欢阅读理工类的人数最有可能是多少?

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$.

参考数据:

$P(K^2 \geq k)$	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

解：（1）因为 50 名师生阅读爱好进行调查，其中教师与学生的人数之比为 1:2，教师中喜欢文学类的人数占 $\frac{1}{2}$ ，学生中喜欢文学类的占 $\frac{3}{4}$ ，得到下面的列联表：

	教师	学生	合计
文学类	10	30	40
理工类	10	10	20
合计	20	40	60

.....3 分

由题可知由列联表可得

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{60(30 \cdot 10 - 10 \cdot 10)^2}{40 \cdot 20 \cdot 40 \cdot 20} = 3.75 > 2.706,$$

所以有 90% 的把握认为教师与学生的阅读爱好存在差异.

.....6 分

（2）由样本数据可知，喜欢阅读理工类频率为 $\frac{1}{3}$ ，用样本的频率估计概率，

所以喜欢阅读理工类书籍的概率为 $\frac{1}{3}$ ，设 11 人中喜欢阅读理工类书籍的人数为

X ，则 $X \sim B(11, \frac{1}{3})$,

.....8 分

所以 $P(x=k) = C_{11}^k (\frac{1}{3})^k (1-\frac{1}{3})^{11-k} (k=0,1,2, \dots, 11)$.

.....9 分

假设 11 人中喜欢阅读理工类书籍的人数最有可能是 k ,

$$\text{则} \begin{cases} C_{11}^k (\frac{1}{3})^k (1-\frac{1}{3})^{11-k} \geq C_{11}^{k+1} (\frac{1}{3})^{k+1} (1-\frac{1}{3})^{10-k} \\ C_{11}^k (\frac{1}{3})^k (1-\frac{1}{3})^{11-k} \geq C_{11}^{k-1} (\frac{1}{3})^{k-1} (1-\frac{1}{3})^{12-k} \end{cases}, \text{得 } 3 \leq k \leq 4$$

所以 11 人中喜欢阅读理工类的人数最有可能是 3 或 4.

.....12 分

21. (12 分)

设抛物线 $C: y^2 = 2x$ 的焦点为 F ， P 是抛物线外一点，直线 PA, PB 与抛物线 C 切于 A, B 两点，过点 P 的直线交抛物线 C 于 D, E 两点，直线 AB 与 DE 交于点 Q .

（1）若 AB 过焦点 F ，且 $|FA||FB| = 4$ ，求直线 AB 的倾斜角；

(2) 求 $\frac{|PQ|}{|PD|} + \frac{|PQ|}{|PE|}$ 的值.

解: (1) 设 $P(x_0, y_0), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), F(\frac{1}{2}, 0)$,

因为直线 AB 的斜率不为 0, 所以设 AB 直线的方程为 $x = ty + \frac{1}{2}$,

$$\text{联立方程} \begin{cases} x = ty + \frac{1}{2}, \\ y^2 = 2x, \end{cases}$$

消去 y , 得 $x^2 - x - 2t^2x + \frac{1}{4} = 0$,

所以 $x_1 + x_2 = 2t^2 + 1, x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{4}$,

$$|FA||FB| = (x_1 + \frac{1}{2})(x_2 + \frac{1}{2})$$

$$= x_1x_2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{4} = t^2 + 1 = 4, \quad t = \pm\sqrt{3},$$

所以直线的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$.

.....2 分

.....4 分

(2) 设过 A 点且与抛物线 C 相切的直线方程为 $y - y_1 = k(x - x_1)$, (k 存在, A 不为原点),

$$\text{联立方程} \begin{cases} y - y_1 = k(x - x_1), \\ y^2 = 2x, \end{cases}$$

消去 x 得, $\frac{k}{2}y^2 - y + y_1 - kx_1 = 0$,

$$\Delta = 1 - 4 \times \frac{k}{2}(y_1 - kx_1) = 0,$$

$$\text{即 } 1 - 4 \times \frac{k}{2}(y_1 - k \frac{y_1^2}{2}) = 0,$$

所以 $ky_1 = 1$, 即 $k = \frac{1}{y_1}$,

.....6 分

所以直线 PA 的方程为 $y - y_1 = \frac{1}{y_1}(x - x_1)$,

即 $yy_1 = x + x_1$,

同理可得, 直线 PB 方程为: $yy_2 = x + x_2$,

因为点 $P(x_0, y_0)$ 在直线 PA, PB 上,

所以 $y_0y_1 = x_0 + x_1, y_0y_2 = x_0 + x_2$,

所以直线 AB 的方程为: $yy_0 = x + x_0$.

.....8 分

设直线 PD 的方程为 $x - x_0 = m(y - y_0)$,

$$\text{联立方程} \begin{cases} x - x_0 = m(y - y_0), \\ y^2 = 2x, \end{cases}$$

消去 x , 得 $y^2 - 2my + 2my_0 - 2x_0 = 0$,

得 $y_D + y_E = 2m, y_Dy_E = 2my_0 - 2x_0$,

$$\text{联立方程} \begin{cases} x - x_0 = m(y - y_0), \\ yy_0 = x + x_0, \end{cases}$$

消去 x , 得 $y_Q = \frac{2x_0 - my_0}{y_0 - m}$,

.....10 分

由于点 P 在抛物线的外部, 点 Q 在抛物线的内部,

$$\text{所以} \frac{|PQ|}{|PD|} + \frac{|PQ|}{|PE|} = \frac{y_Q - y_0}{y_D - y_0} + \frac{y_Q - y_0}{y_E - y_0}$$

$$= \frac{(y_Q - y_0)(y_D + y_E - 2y_0)}{y_Dy_E - y_0(y_D + y_E) + y_0^2} = \frac{\left(\frac{2x_0 - my_0}{y_0 - m}\right)(2m - 2y_0)}{2my_0 - 2x_0 - 2my_0 + y_0^2} = 2.$$

.....12 分

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{x+4}{e^x}$, $g(x) = \frac{1}{3}ax^3 - x^2 + 3x$.

(1) 求曲线 $y = f(x) - g(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程;

(2) 若 $f'(x) + g'(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

解: (1) 因为 $y = f(x) - g(x) = \frac{x+4}{e^x} - \frac{1}{3}ax^3 + x^2 - 3x$,

$$\text{所以} y' = f'(x) - g'(x) = \frac{-x-3}{e^x} - ax^2 + 2x - 3,$$

所以该切线的斜率为 $f'(0) - g'(0) = \frac{0-3}{e^0} - 3 = -6$, 易求切点为 $(0, 4)$.

所以曲线的切线方程为 $y = -6x + 4$.

.....4 分

(2) 由题意, 得 $ax^2 - 2x + 3 - \frac{x+3}{e^x} \geq 0$,

记 $F(x) = ax^2 - 2x + 3 - \frac{x+3}{e^x}$, 则 $F'(x) = 2ax - 2 + \frac{x+2}{e^x}$,

记 $G(x) = F'(x) = 2ax - 2 + \frac{x+2}{e^x}$, 则 $G'(x) = 2a - \frac{x+1}{e^x}$,

记 $H(x) = G'(x) = 2a - \frac{x+1}{e^x}$, 则 $H'(x) = \frac{x}{e^x}$,

显然, 当 $x < 0$ 时, $H'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $H'(x) > 0$,

所以, $H(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数, 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

所以 $H(x)_{\min} = H(0) = 2a - 1$.

.....6 分

①若 $2a - 1 \geq 0$, 即 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $H(x) \geq H(0) \geq 0$,

所以 $G(x) = 2ax - 2 + \frac{x+2}{e^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 又因为 $G(0) = 0$,

从而, 当 $x < 0$ 时, $G(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $G(x) > 0$,

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数, 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

所以 $F(x) \geq F(0) = 0$, 即 $a \geq \frac{1}{2}$ 满足题意.

.....8 分

②若 $2a - 1 < 0$, 即 $a < \frac{1}{2}$ 时, $H(0) < 0$, $H(-1) = 2a$,

(i) 若 $H(-1) \leq 0$, 即 $a \leq 0$ 时, $H(x) < 0$ 在 $(-1, 0)$ 上恒成立;

.....10 分

(ii) 若 $H(-1) > 0$, 即 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 使 $H(x_0) = 0$, 所以当 $x \in (x_0, 0)$ 时, $H(x) < 0$.

由 (i) (ii) 知, 当 $a < \frac{1}{2}$ 时, $\exists x_0 \in (-1, 0)$, $H(x) < 0$ 在 $(x_0, 0)$ 上恒成立,

所以 $G(x)$ 在 $(x_0, 0)$ 上为减函数, 从而有 $G(x) < G(0) = 0$,

所以 $F(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上为减函数, 从而有 $F(x) < F(0) = 0$,

这与 $F(x) \geq 0$ 矛盾, 故 $a < \frac{1}{2}$ 不合题意.

综上, 实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

.....12 分