武汉市 2023 届高三年级五月模拟训练试题
数学试卷参考答案及评分标准

选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	D	D	A	B	B	A	ABC	AB	AD	BD

填空题：

13. 32　　14. $\frac{9}{4}$　　15. 是；2　　16. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

解答题：

17.（10 分）解：

（1）当 $n=1$ 时，$2a_1=a_1a_2$，即 $a_2=2$.

当 $n\ge 2$ 时，$2S_{n-1}=a_{n-1}a_n$.

所以 $2a_n=a_n(a_{n+1}-a_{n-1})$.

因为数列 $\{a_n\}$ 中各项均不为零，即 $a_{n+1}-a_{n-1}=2$.

所以数列 $\{a_n\}$ 中奇数项是以 a_1 为首项，2 为公差的等差数列；

偶数项是以 a_2 为首项，2 为公差的等差数列.

当 $n=2k$ 时，$a_{2k}=a_2+(k-1)\times 2=2k$，即 $a_n=n$；

当 $n=2k-1$ 时，$a_{2k-1}=a_1+(k-1)\times 2=2k-1$，即 $a_n=n$.

综上，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$　　…………5 分

（2）由（1）知数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，1 为公差的等差数列，即易知 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

因为 $S_k\le 2023$，所以 $k(k+1)\le 4046$，当 $k\le 63$ 时，不等式恒成立；

当 $k=64$ 时，$S_k>2023$.

故正整数 k 的最大值为 63.　　…………10 分

18.（12 分）解：

（1）在 ΔABC 中有 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$.

即 $bc\cdot\cos A=-\frac{1}{3}ac\cdot\cos B=-\frac{1}{2}ab\cdot\cos C$.

因为 $bc\cdot\cos A=-\frac{1}{3}ac\cdot\cos B$，由正弦定理可得 $\sin B\cos A=-\frac{1}{3}\sin A\cos B$，即 $\tan A=-3\tan B$.

同理 $\tan C=\frac{3}{2}\tan B$.

在 ΔABC 中有 $\tan A=\tan(\pi-B-C)=-\tan(B+C)=\frac{\tan B+\tan C}{\tan B\tan C-1}$.

解得 $\tan A=-1,\tan B=\frac{1}{3},\tan C=\frac{1}{2}$.

由 $0<A<\pi$，得：$A=\frac{3\pi}{4}$.　　…………6 分

（2）ΔABC面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A$，代入$A=\frac{3\pi}{4},b=2$，整理得：$S=\frac{\sqrt{2}}{2}c$.

由（1）知$\tan B=\frac{1}{3},\tan C=\frac{1}{2}$，即$\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10},\sin C=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

ΔABC中由正弦定理可得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，即$c=2\sqrt{2}$.

所以$S=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2\sqrt{2}=2$. …………12 分

19.（12 分）解：

（1）ΔPAB中$PA=AB$，E为PB的中点，所以$AE\perp PB$.

在正方形$ABCD$中，$BC\perp AB$.

因为$PA\perp$平面$ABCD$，$BC\subset$平面$ABCD$，即$PA\perp BC$.

又因为$PA\cap AB=A$，$PA,AB\subset$平面PAB，所以$BC\perp$平面PAB.

$AE\subset$平面PAB，即$AE\perp BC$，又因为$AE\perp PB$，$PB\cap BC=B$，$PB,BC\subset$平面PBC.

所以$AE\perp$平面PBC，$AE\subset$平面AEF，

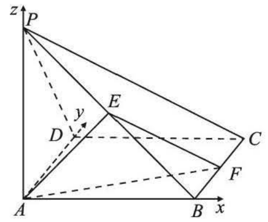
即平面$AEF\perp$平面PBC. …………6 分

（2）因为$PA\perp$平面$ABCD$，底面$ABCD$是正方形，所以易知AB,AD,AP两两垂直.

以A为原点，AB,AD,AP所在直线分别为x轴、y轴、z轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

有$A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，PB中点$E(1,0,1)$，设$F(2,\lambda,0),0\le\lambda\le 2$.

$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2),\overrightarrow{DC}=(2,0,0),\overrightarrow{AE}=(1,0,1),\overrightarrow{AF}=(2,\lambda,0)$.



设平面PCD的法向量$\vec{m}=(x,y,z)$，由$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$，

得$\begin{cases}2y-2z=0\\ 2x=0\end{cases}$，取$\vec{m}=(0,1,1)$.

设平面AEF的法向量$\vec{n}=(a,b,c)$，由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x+z=0\\ 2x+\lambda y=0\end{cases}$，取$\vec{n}=(\lambda,-2,-\lambda)$.

所以平面AEF与平面PCD的夹角的余弦值为$\left|\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\frac{-2-\lambda}{\sqrt{2}\times\sqrt{2\lambda^2+4}}\right|=\left|\frac{2+\lambda}{2\sqrt{\lambda^2+2}}\right|$.

令$\lambda+2=t,t\in[2,4]$，则$\left|\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\frac{t}{2\sqrt{t^2-4t+6}}\right|=\left|\frac{1}{2\sqrt{\frac{6}{t^2}-\frac{4}{t}+1}}\right|=\left|\frac{1}{2\sqrt{6(\frac{1}{t}-\frac{1}{3})^2+\frac{1}{3}}}\right|$，

所以当$\frac{1}{t}=\frac{1}{3}$即$t=3$时，平面AEF与平面PCD的夹角的余弦值取得最大值$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

此时平面AEF与平面PCD的夹角取得最小值$\frac{\pi}{6}$. …………12 分

20.（12 分）解：

（1）补全2×2列联表如下表：

	航天达人	非航天达人	合计
男	20	6	26
女	10	14	24
合计	30	20	50

零假设 H_0：假设“航天达人”与性别无关.

根据表中的数据计算得到 $\chi^2=\dfrac{50\times(20\times14-60)^2}{30\times20\times26\times24}=\dfrac{3025}{468}\approx6.464$.

查表可知 $6.464<6.635=\chi_{0.010}$.

所以根据小概率值 $\alpha=0.010$ 的 χ^2 独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，因此可以认为 H_0 成立，因此“航天达人”与性别无关. …………6 分

（2）在“航天达人”中按性别分层抽样抽取，男航天达人有 $\dfrac{20}{30}\times6=4$（人），女航天达人有 2 人.

X 所有可能取值为：$0,1,2$.

则 $P(X=0)=\dfrac{C_4^3}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$，$P(X=1)=\dfrac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\dfrac{3}{5}$，$P(X=2)=\dfrac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$.

所以 X 的分布列如下：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

X 的数学期望为 $E(X)=0\times\dfrac{1}{5}+1\times\dfrac{3}{5}+2\times\dfrac{1}{5}=1$. …………12 分

21.（12 分）解：

（1）已知双曲线渐近线为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，即 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}$.

因为椭圆 C_2 的长轴长 $2a=4$，即 $a=2,b=1$.

所以双曲线 C_1 的方程为：$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$.

椭圆 C_2 的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. …………4 分

（2）当直线 l_1、l_2 的斜率不存在时，不满足题意.

故直线 l_1 的方程设为：$y=kx+m$，直线 l_1 过点 $P(2,1)$，即 $2k+m=1$.

与双曲线方程联立 $\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{4}-y^2=1\end{cases}$，得 $(1-4k^2)x^2-8kmx-4m^2-4=0$.

故 $1-4k^2\neq0,\Delta=64k^2m^2+16(m^2+1)(1-4k^2)>0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，有 $x_1+x_2=\dfrac{8km}{1-4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-4m^2-4}{1-4k^2}$.

设 $Q(x_0,y_0)$.

$$k_{QA}+k_{QB}=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}+\frac{y_0-y_2}{x_0-x_2}=\frac{(y_0-kx_1-m)(x_0-x_2)+(y_0-kx_2-m)(x_0-x_1)}{x_0^2-x_0(x_1+x_2)+x_1x_2}.$$

化简得 $k_{QA}+k_{QB}=\dfrac{2x_0y_0-(kx_0+y_0-m)(x_1+x_2)+2kx_1x_2-2mx_0}{x_0^2-x_0(x_1+x_2)+x_1x_2}$.

代入韦达定理得：$k_{QA}+k_{QB}=\dfrac{2x_0y_0(1-4k^2)-8km(kx_0+y_0-m)-8km^2-8k-2mx_0(1-4k^2)}{(1-4k^2)x_0^2-8kmx_0-4m^2-4}$.

将 $2k+m=1$ 代入其中消去 m 化简得：

$k_{QA}+k_{QB}=\dfrac{(16y_0-8x_0y_0)k^2+(4x_0-8-8y_0)k+2x_0y_0-2x_0}{(16x_0-16-4x_0^2)k^2+(16-8x_0)k+x_0^2-8}$.

由动直线l_1、l_2互不影响可知，要满足$k_{QA}+k_{QB}+k_{QM}+k_{QN}$为定值，

则$k_{QA}+k_{QB}$为定值，$k_{QM}+k_{QN}$为定值.

因此要满足$k_{QA}+k_{QB}$为定值，则有：

①若$16y_0-8x_0y_0=0$，$16x_0-16-4x_0^2=0$，计算得$x_0=2, y_0=0$.

经检验满足$Q(2,0)$，此时$k_{QA}+k_{QB}=1$.

②若$16y_0-8x_0y_0\neq 0$，即$y_0\neq 0, x_0\neq 2$，有$\dfrac{16y_0-8x_0y_0}{16x_0-16-4x_0^2}=\dfrac{4x_0-8-8y_0}{16-8x_0}=\dfrac{2x_0y_0-2x_0}{x_0^2-8}$.

无解.

综上，当$Q(2,0)$，$k_{QA}+k_{QB}=1$.

下面只需验证当$Q(2,0)$时，$k_{QM}+k_{QN}$是否为定值.

设直线l_2方程为：$y=tx+n$，直线l_2过点$P(2,1)$，即$2t+n=1$.

椭圆方程联立$\begin{cases} y=tx+n \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，得$(1+4t^2)x^2+8tnx+4n^2-4=0$.

故$\Delta>0$.

设$M(x_3,y_3),N(x_4,y_4)$，有$x_3+x_4=\dfrac{-8tn}{1+4t^2}$，$x_3x_4=\dfrac{4n^2-4}{1+4t^2}$.

$k_{QM}+k_{QN}=\dfrac{y_3}{x_3-2}+\dfrac{y_4}{x_4-2}=\dfrac{(tx_3+n)(x_4-2)+(tx_4+n)(x_3-2)}{x_3x_4+4-2(x_3+x_4)}$.

化简得$k_{QM}+k_{QN}=\dfrac{2tx_3x_4+(n-2t)(x_3+x_4)-4n}{x_3x_4+4-2(x_3+x_4)}$.

代入韦达定理化简可得：$k_{QM}+k_{QN}=\dfrac{-8t-4n}{4n^2+16t^2+16tn}$.

将$2t+n=1$代入其中可得：$k_{QM}+k_{QN}=-1$.

所以当$Q(2,0)$，$k_{QA}+k_{QB}=1$，$k_{QM}+k_{QN}=-1$，$k_{QA}+k_{QB}+k_{QM}+k_{QN}=0$.

所以点Q坐标为$(2,0)$. …………12 分

22.（12 分）解：

（1）若$b=c=0$，即$f(x)=ax-\ln x(x>0)$.

$$f'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}.$$

①若$a\le 0$，则$f'(x)<0$，即$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减；

②若$a>0$，令$f'(x)>0$有$x>\dfrac{1}{a}$,即$f(x)$在$(0,\dfrac{1}{a})$上单调递减，$(\dfrac{1}{a},+\infty)$上单调递增.

综上有，当$a\le 0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减.

当$a>0$，$f(x)$在$(0,\dfrac{1}{a})$上单调递减，$(\dfrac{1}{a},+\infty)$上单调递增. …………4 分

（2）由题意知：已知x_1,x_2是$f(x)$的两个零点，$x_1<x_2$.

即 $ax_1+\dfrac{b}{x_1}+c-\ln x_1=0$， $ax_2+\dfrac{b}{x_2}+c-\ln x_2=0$.

所以 $a(x_1-x_2)+b(\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2})+\ln x_2-\ln x_1=0$， 即 $b=ax_1x_2-x_1x_2\cdot\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$.

要证： $x_2(ax_1-1)<b<x_1(ax_2-1)$.

只需证： $ax_1x_2-x_2<b<ax_1x_2-x_1$.

即证： $-x_2<-x_1x_2\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}<-x_1$.

即证： $1-\dfrac{x_1}{x_2}<\ln\dfrac{x_2}{x_1}<\dfrac{x_2}{x_1}-1$， 令 $t=\dfrac{x_2}{x_1}>1$.

即证： $1-\dfrac{1}{t}<\ln t<t-1$.

令 $p(t)=\ln t-1+\dfrac{1}{t}(t>1)$， 有 $p'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{t-1}{t^2}>0$.

即 $p(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 $p(t)>p(1)=0$， 即 $\ln t>1-\dfrac{1}{t}$.

设 $q(t)=\ln t-t+1(t>1)$， 有 $q'(t)=\dfrac{1}{t}-1<0$.

所以 $q(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，则 $q(t)<q(1)=0$，即 $\ln t<t-1$

综上可得： $x_2(ax_1-1)<b<x_1(ax_2-1)$. ············12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。