

2019 东直门中学高三上期中试题

数 学

2019. 10. 28

命题人：申轶劼 审稿人：陈昕

班级_____ 姓名_____ 成绩_____

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设函数 $y = \sqrt{4-x^2}$ 的定义域 A, 函数 $y = \ln(1-x)$ 的定义域为 B, 则 $A \cap B =$ ()

- A. (1,2) B. (1,2] C. (-2,1) D. [-2,1)

2. 下列函数中，既是奇函数且在 (0,1) 内是减函数 ()

- ① $f(x) = -x^3$ ② $f(x) = (\frac{1}{2})^{|x|}$ ③ $f(x) = -\sin x$ ④ $f(x) = \frac{x}{e^{|x|}}$

- A. ①③ B. ①④ C. ②③ D. ③④

3. 已知向量 $\vec{a} = (2,0)$, $\vec{b} = (t,1)$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|$, 则 $\vec{a} - \vec{b} =$ ()

- A. (1,1) B. (1,-1) C. (-1,1) D. (-1,-1)

4. 以角 θ 的顶点为坐标原点，始边为 x 轴的非负半轴，建立平面直角坐标系，角 θ 终边过点

$P(2,4)$, 则 $\tan(\theta + \frac{\pi}{4}) =$ ()

- A. $-\frac{1}{3}$ B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. 3

5. 函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式可以为 ()



- A. $f(x) = \frac{1}{x} - x^2$ B. $f(x) = \frac{1}{x} - x^3$ C. $f(x) = \frac{1}{x} - e^x$ D. $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

6. 设 \vec{a}, \vec{b} 是非零向量, 则 “ $\vec{a} = \vec{b}$ ” 是 “ $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$ ” 的 ()

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ$, $AC = 4$, $BC = 2\sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

A. $4\sqrt{3}$ B. 4 C. $2\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{2}$

8. 设函数 $f(x) = \sin(4x + \frac{\pi}{4}) (x \in [0, \frac{9\pi}{16}])$, 若函数 $y = f(x) + a (a \in \mathbb{R})$ 恰有三个零点 x_1, x_2, x_3

($x_1 < x_2 < x_3$), 则 $x_1 + 2x_2 + x_3$ 的值是 ()

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{5\pi}{4}$ D. π

DABBCACB

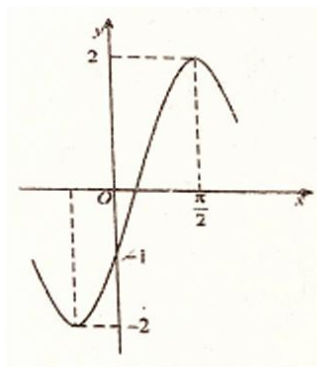
二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

9. 已知 $a = 2^{1.2}$, $b = (\frac{1}{2})^{-0.5}$, $c = 2 \log_5 2$, 则 a, b, c 的大小关系是_____.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 0 的等差数列, $a_1 = 1$, 且 a_1, a_2, a_3 成等比数列, 那么数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和 S_{10} 等于_____.

11. 已知 $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, 则 $\cos(\pi - \alpha) =$ _____.

12. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图, 则 $\varphi =$ _____; $\omega =$ _____.



13. 已知 $f(x) = \cos x \cdot \ln x$, $f(x_0) = f(x_1) = 0 (x_0 \neq x_1)$, 则 $|x_0 - x_1|$ 的最小值是_____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $B = 60^\circ$, $b = 4$, 下列判断:

①若 $c = 5$, 则角 C 有 两个解;

②若 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 6$, 则 AC 边上的高为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$;

③ $a + c$ 可能是 9.

其中判断正确的序号是_____. (写出所有正确命题的序号)

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \cos(2x - \frac{\pi}{3}) - 2 \sin x \cos x$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期；

(II) 求证：当 $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 时， $f(x) \geq -\frac{1}{2}$.

16. $\triangle ABC$ 中， $c = 7$ ， $\sin C = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

(I) 若 $\cos B = \frac{5}{7}$ ，求 b 的值；

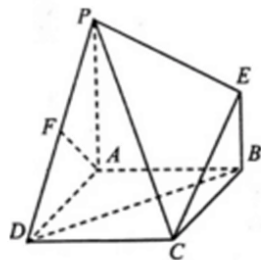
(II) 若 $a + b = 11$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积.

17. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，其前 n 项和为 S_n ，且 $a_2 = 2$ ， $S_2 - 3a_1 = 0$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 若 $S_n + a_n \geq 48$ ，求 n 的最小值.

18.如图, 四边形 $ABCD$ 是正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $EB \parallel PA$, $AB = PA = 4$, $EB = 2$, F 为 PD 的中点.



- (I) 求证: $AF \perp PC$;
 (II) 求证: $BD \parallel$ 平面 PEC ;
 (III) 求二面角 $D-PC-E$ 的大小.

19. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 焦距为 $2\sqrt{2}$.

- (I) 求椭圆 E 的方程;
 (II) 若 C, D 分别是椭圆 E 上的左右顶点, 动点 M 满足 $MD \perp CD$, 连接 CM , 交椭圆 E 于点 P , 证明: $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP}$ 为定值 (O 为坐标原点).

20. 已知函数 $f(x) = x + a \ln x$, $a \in R$.

- (I) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程;
 (II) 求函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值;
 (III) 若函数 $F(x) = \frac{1}{x^2} f(x)$, 当 $a=1$ 时, $F(x)$ 的最大值为 M , 求证: $M < \frac{3}{2}$.