2022年高三年级期初调研检测

数学参考答案及评分标准

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

B C A D　　C B C D

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

9. ACD　　10. AC　　11. BCD　　12. AD

三、填空题：本题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\dfrac{15}{2}$；　**14.** 300；　**15.** $-\dfrac{1}{e^2}<a<0$；　**16.** $[\dfrac{\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{85}}{7}]$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. （10分）

解：（1）因为 $a\cdot\cos B+b\cdot\cos A=2c\cdot\cos C$

所以由正弦定理得：$\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos C$ ……………………………1 分

即 $\sin(A+B)=2\sin C\cos C$ ……………………………………………………………2 分

因为 $A+B=\pi-C$，所以 $\sin C=2\sin C\cos C$

因为 $0<C<\pi$，所以 $\cos C=\dfrac{1}{2}$

所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$ ………………………………………………………………………5 分

（2）由（1）知 $C=\dfrac{\pi}{3}$，$A=\dfrac{2\pi}{3}-B$

因为 ΔABC 为锐角三角形，所以 $0<B<\dfrac{\pi}{2}$ 且 $0<\dfrac{2\pi}{3}-B<\dfrac{\pi}{2}$

所以 $\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$ ……………………………………………………………7 分

由正弦定理得：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{\sin(\dfrac{2\pi}{3}-B)}{\sin B}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\dfrac{1}{2}\sin B}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan B}+\dfrac{1}{2}$ ………9 分

因为 $\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\tan B>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

所以 $\dfrac{a}{b}\in(\dfrac{1}{2},2)$. ……………………………………………………… 10 分

18.（12分）

解:（1）证明：连接 A_1B，

由题 $BB_1\perp$ 平面 ABC，所以 $BB_1\perp BC$

因为 $BC\perp AB$， $AB\cap BB_1=B$

所以 $BC\perp$ 平面 AA_1B_1B ………………………… 2 分

因为 $AB_1\subset$ 平面 AA_1B_1B

所以 $BC\perp AB_1$ …………………………………… 3 分

因为 $AA_1=AB=2$，所以四边形 AA_1B_1B 是正方形，

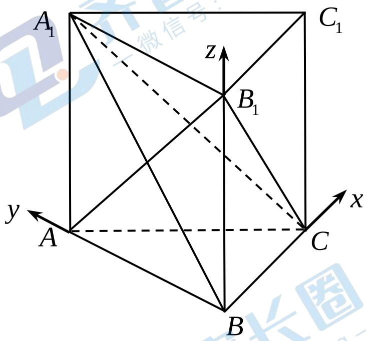
所以 $AB_1\perp A_1B$， ………………………………… 4 分

又因为 $BC\cap A_1B=B$，

所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1BC ………………………………… 5 分

因为 $A_1C\subset$ 平面 A_1BC

所以 $A_1C\perp AB_1$ ………………………………… 6 分



（2）由（1）得 $BC\perp$ 平面 AA_1B_1B

所以点 C 到平面 AA_1B 的距离为 BC ……………………………………………………………7 分

所以 $V_{B_1-A_1AC}=V_{C-AA_1B_1}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}A_1B_1\cdot AA_1\cdot BC=\dfrac{2}{3}BC=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

解得 $BC=\sqrt{2}$ ……………………………………………………………………………8 分

因为 BA,BC,BB_1 两两垂直，以 B 为原点，分别以 BC,BA,BB_1 所在直线为 x 轴， y 轴， z 轴

建立如图所示空间直角坐标系，则 $A(0,2,0),A_1(0,2,2),B_1(0,0,2),C(\sqrt{2},0,0)$ ………9 分

设平面 AB_1C 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$

因为 $\overrightarrow{AC}=(\sqrt{2},-2,0)$， $\overrightarrow{AB_1}=(0,-2,2)$

则 $\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{2}x_1-2y_1=0$， $\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB_1}=-2y_1+2z_1=0$

令 $x_1=\sqrt{2}$，则 $\vec{m}=(\sqrt{2},1,1)$ ………………………………………………………… 10 分

设平面 A_1B_1C 的法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$

因为 $\overrightarrow{A_1C}=(\sqrt{2},-2,-2)$， $\overrightarrow{A_1B_1}=(0,-2,0)$

则 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=\sqrt{2}x_2-2y_2-2z_2=0$， $\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=-2y_2=0$

令 $x_2=\sqrt{2}$，则 $\vec{n}=(\sqrt{2},0,1)$ ………………………………………………………… 11 分

设二面角 A_1-B_1C-A 的平面角为 θ

所以 $\cos\theta=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

所以二面角 A_1-B_1C-A 的大小为 $\dfrac{\pi}{6}$ ……………………………………………… 12 分

19.（12分）

解：（1）由不等式 $x^2-4nx+3n^2\le 0$ 可得：$n\le x\le 3n$，

$\therefore a_n=2n+1$ ……………………………………………………………… 2 分

$T_n=\frac{1}{4}\times 3^{n+1}-\frac{1}{2}n-\frac{3}{4}$

当 $n=1$ 时，$b_1=1$， ……………………………………………………………… 3 分

当 $n\ge 2$ 时，$b_n=T_n-T_{n-1}=\frac{1}{2}\times 3^n-\frac{1}{2}$，

因为 $b_1=1$ 适合上式，

$\therefore b_n=\frac{1}{2}\times 3^n-\frac{1}{2}$ ……………………………………………………………… 6 分

（2）由（1）可得：$c_n=3^n-1+(-1)^{n-1}\lambda(\frac{3}{2})^n$，

$\therefore c_{n+1}=3^{n+1}-1+(-1)^n\lambda(\frac{3}{2})^{n+1}$

$\because c_n<c_{n+1}$，$\therefore c_{n+1}-c_n=2\times 3^n+\frac{5}{2}(-1)^n\lambda(\frac{3}{2})^n>0$

$\therefore (-1)^n\lambda>-\frac{4}{5}\times 2^n$ ……………………………………………………………… 8 分

当 n 为奇数时，$\lambda<\frac{4}{5}\times 2^n$

由于 $\frac{4}{5}\times 2^n$ 随着 n 的增大而增大，当 $n=1$ 时，$\frac{4}{5}\times 2^n$ 的最小值为 $\frac{8}{5}$，

$\therefore \lambda<\frac{8}{5}$ ……………………………………………………………… 10 分

当 n 为偶数时，$\lambda>-\frac{4}{5}\times 2^n$

由于 $-\frac{4}{5}\times 2^n$ 随着 n 的增大而减小，当 $n=2$ 时，$-\frac{4}{5}\times 2^n$ 的最大值为 $-\frac{16}{5}$，

$\therefore \lambda>-\frac{16}{5}$

综上可知：$-\frac{16}{5}<\lambda<\frac{8}{5}$ ……………………………………………………………… 12 分

20.（12分）

解：（1）零假设为 H_0：性别因素与学生体育锻炼的经常性无关联

根据列联表中的数据，经计算得到

$\chi^2 = \dfrac{200\times(40\times80-20\times60)^2}{60\times140\times100\times100} \approx 9.524 > 7.879 = x_{0.005}$ ……………………………………3 分

根据小概率值$\alpha = 0.005$的独立性检验，我们推断H_0不成立，即认为性别因素与学生体育锻炼的经常性有关联，此推断犯错误的概率不大于0.005. ……………………………………4 分

（2）用A表示事件“选到经常参加体育锻炼的学生”，B表示事件“选到男生”，则

$P(B|A) = \dfrac{n(AB)}{n(A)} = \dfrac{80}{140} = \dfrac{4}{7}$. ……………………………………………………7 分

（3）由题知X的所有可能取值为$0,1,2$，

$P(X=0) = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{12}$；$P(X=1) = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{11}{18}$；

$P(X=2) = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{11}{36}$；

所以X的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{11}{18}$	$\dfrac{11}{36}$

……………………………………………………………… 10 分

$E(X) = 0\times\dfrac{1}{12} + 1\times\dfrac{11}{18} + 2\times\dfrac{11}{36} = \dfrac{11}{9}$. ……………………………………………… 12 分

21.（12分）

解：（1）设动圆P的半径为R，圆心P的坐标为(x,y)

由题意可知：圆C_1的圆心为$C_1(-1,0)$，半径为$\dfrac{7}{2}$；圆C_2的圆心为$C_2(1,0)$，半径为$\dfrac{1}{2}$.

$\because$动圆P与圆C_1内切，且与圆C_2外切，

$\therefore \begin{cases} |PC_1| = \dfrac{7}{2} - R \\ |PC_2| = \dfrac{1}{2} + R \end{cases} \Rightarrow |PC_1| + |PC_2| = 4 > |C_1C_2| = 2$ ……………………………2 分

$\therefore$动圆P的圆心的轨迹E是以C_1, C_2为焦点的椭圆，设其方程为：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$，

其中$2a = 4, 2c = 2$，$\therefore a = 2, b^2 = 3$

从而轨迹E的方程为：$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ ……………………………………………4 分

（2）（i）设直线AB的方程为$y = k(x-1)(k \neq 0)$，$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$,则$M(x_1,-y_1)$

由 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 可得：$(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{4k^2+3}$， $x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}$ ………………………………………5 分

直线 BM 的方程为 $y+y_1=\dfrac{y_2+y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$，………………………………………6 分

令 $y=0$ 可得 N 点的横坐标为：

$$x_N=\frac{x_2-x_1}{y_2+y_1}y_1+x_1=\frac{k(x_2-x_1)(x_1-1)}{k(x_1+x_2-2)}+x_1=\frac{2x_1x_2-(x_1+x_2)}{x_1+x_2-2}$$

$$=\frac{2\times\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}-\dfrac{8k^2}{4k^2+3}}{\dfrac{8k^2}{4k^2+3}-2}=4$$

$\therefore N$ 为一个定点，其坐标为 $(4,0)$ ………………………………………8 分

（ii）根据（i）可进一步求得：

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_1|=\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}$$

$=\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{(\dfrac{8k^2}{4k^2+3})^2-4\times\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}}=\dfrac{12(k^2+1)}{4k^2+3}$ ………………………………9 分

$\because AB\perp DG$，$\therefore k_{DG}=-\dfrac{1}{k}$，

则 $|DG|=\dfrac{12(k^2+1)}{3k^2+4}$ ………………………………………10 分

$\because AB\perp DG$，

$\therefore$ 四边形 $ADBG$ 面积 $S=\dfrac{1}{2}|AB|\times|DG|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{12(k^2+1)}{4k^2+3}\times\dfrac{12(k^2+1)}{3k^2+4}=\dfrac{72(k^2+1)^2}{(4k^2+3)(3k^2+4)}$

（法一）$S=\dfrac{72(k^2+1)^2}{(4k^2+3)(3k^2+4)}\ge\dfrac{72(k^2+1)^2}{(\dfrac{4k^2+3+3k^2+4}{2})^2}=\dfrac{288}{49}$

等号当且仅当 $4k^2+3=3k^2+4$ 时取，即 $k=\pm1$ 时，$S_{\min}=\dfrac{288}{49}$ ………………………12 分

（法二）令 $k^2+1=t$，$\because k\ne0$，$\therefore t>1$，

则 $S=\dfrac{72t^2}{12t^2+t-1}=\dfrac{72}{-\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{t}+12}=\dfrac{72}{-(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{49}{4}}$

当 $\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{2}$，即 $k=\pm1$ 时，$S_{\min}=\dfrac{288}{49}$ ………………………………………12 分

22.（12分）

解：（1）当 $x\in(0,+\infty)$ 时，由题知：$f'(x)=\ln x$ ……………………………………………1 分

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增 ……………………………………………2 分

所以当 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)\ge f(1)=-1$，又因为 $f(0)=0$

所以 $f(x)$ 最小值为 $f(1)=-1$ ……………………………………………………………………3 分

（2）因为 $f(e)=0, f(0)=0$，由（1）知：当 $x\in[0,e]$ 时，$-1\le f(x)\le 0$ …………4 分

因为 $f'(e)=1$，所以 $f(x)$ 在点 $(e,0)$ 处的切线方程为 $y=x-e$ …………………………5 分

令 $g(x)=x\ln x-2x+e(0<x\le e)$，则 $g'(x)=\ln x-1\le 0$

所以 $g(x)$ 在 $(0,e]$ 上单调递减，$g(x)\ge g(e)=0$

所以 $f(x)\ge x-e$ ……………………………………………………………………………………6 分

所以曲线 $y=f(x)(0\le x\le e)$ 在 x 轴、y 轴、$y=-1$ 和 $y=x-e$ 之间 ……………7 分

设原点为 O，y 轴与 $y=-1$ 交点为 A，$y=-1$ 和 $y=x-e$ 的交点为 $B(e-1,-1)$，点 $(e,0)$ 为 C，

所以曲线 $y=f(x)(0\le x\le e)$ 在梯形 $OABC$ 内部

所以 $S<S_{OABC}=(e-1)\times1+\dfrac{1}{2}\times1\times1=e-\dfrac{1}{2}$ ……………………………………8 分

（3）因为 $(x+\dfrac{m}{n})e^{\frac{m}{x}+n}\le x^{n+1}\ln x$，所以 $\dfrac{n}{x}(x+\dfrac{m}{n})e^{\frac{m}{x}+n}\le\dfrac{n}{x}x^{n+1}\ln x$

所以 $(n+\dfrac{m}{x})e^{\frac{m}{x}+n}\le nx^n\ln x=x^n\ln x^n=\ln x^n e^{\ln x^n}$ ……………………………9 分

①当 $n+\dfrac{m}{x}<0$ 时，

因为 $x\ge1$，所以 $m<-nx\le-n$，所以 $m+n<0$ ……………………………………… 10 分

②当 $n+\dfrac{m}{x}\ge0$ 时，

令 $g(x)=xe^x$，$x\in[0,+\infty)$

则 $g'(x)=(x+1)e^x>0$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 时恒成立

所以 $g(x)=xe^x$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 时单调递增

由题知：$\ln x^n\ge0$

所以 $n+\dfrac{m}{x}\le\ln x^n$ ……………………………………………………………………… 11 分

所以 $\dfrac{m}{n}\le x\ln x-x$

由（1）知：$\dfrac{m}{n}\le-1$

所以 $m+n\le0$ ……………………………………………………………………………………… 12 分