

高三数学试题

一、选择题. 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{0, a\}$, $B = \{2^a, b\}$, 若 $A \cap B = \{1\}$, 则 $a + b =$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 若 $1 + i$ 是实系数一元二次方程 $x^2 + px + q = 0$ 的一个根, 则

- A. $p = 2, q = 2$ B. $p = 2, q = -2$ C. $p = -2, q = 2$ D. $p = -2, q = -2$

3. 若 $(x + y)^6 = a_0 y^6 + a_1 x y^5 + a_2 x^2 y^4 + \cdots + a_6 x^6$, 则 $(a_0 + a_2 + a_4 + a_6)^2 - (a_1 + a_3 + a_5)^2$ 的值为

- A. 0 B. 32 C. 64 D. 128

4. 在音乐理论中, 若音 M 的频率为 m , 音 N 的频率为 n , 则它们的音分差 $1200 \log_2 \frac{m}{n}$. 当

音 A 与音 B 的频率比为 $\frac{9}{8}$ 时, 音分差为 r , 当音 C 与音 D 的频率比为 $\frac{256}{243}$ 时, 音分差为 s ,

则

- A. $2r + 3s = 600$ B. $3r + 2s = 600$
C. $5r + 2s = 1200$ D. $2r + 5s = 1200$

5. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $l: x - 2y + 2 = 0$ 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 相交于 A, B 两点,

则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 的值为

- A. 4 B. 8 C. 12 D. 16

6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(6, 8)$, 将 $\overrightarrow{OA}$ 绕点 O 顺时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后得 $\overrightarrow{OA'}$, 则 A' 的纵坐标为

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

7. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$)，若 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ ， $f(\pi) = 1$ ， $f(x)$ 的最

小正周期 $T > 2\pi$ ，则 φ 的值为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2}{3}\pi$ D. $\frac{5}{6}\pi$

8. 若实数 a, b, c 满足 $6^a = 12^{ac} = 3$ ， $3^{b-ab} = 5^{a-ab}$ ，则 a, b, c 的大小关系是

- A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知一组数据为：4, 1, 2, 5, 5, 3, 3, 2, 3, 2，则

- A. 标准差为 $\frac{8}{5}$ B. 众数为 2 和 3
C. 70 分位数为 $\frac{7}{2}$ D. 平均数为 3

10. 用一个平面截正方体，则截面的形状不可能是

- A. 锐角三角形 B. 直角梯形 C. 正五边形 D. 边长不相等的六边形

11. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = x^4 - x^2 + ax + 1$ ，则

- A. 存在实数 a ，使函数 $f(x)$ 的图象是轴对称图形
B. 存在实数 a ，使函数 $f(x)$ 为单调函数
C. 对任意实数 a ，函数 $f(x)$ 都存在最小值
D. 对任意实数 a ，函数 $f(x)$ 都存在两条过原点的切线

12. 过圆 $O: x^2 + y^2 = 8$ 内一点 $P(1, \sqrt{3})$ 作两条互相垂直的弦 AB, CD ，得到四边形 $ADBC$ ，则

- A. $|AB|$ 的最小值为 4 B. 当 $|AB| = 2\sqrt{5}$ 时， $|CD| = 2\sqrt{7}$
C. 四边形 $ADBC$ 面积的最大值为 16 D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ 为定值

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 若椭圆 C_2 的焦点在 y 轴上，且与椭圆 $C_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的离心率相同，则椭圆 C_2 的一个标准方程为_____.

14. 某公司决定从甲、乙两名员工中选一人去完成一项任务，两人被选中的概率都是0.5. 据以往经验，若选员工甲，按时完成任务的概率为0.8；若选员工乙，按时完成任务的概率为0.9. 则选派一名员工，任务被按时完成的概率为_____.

15. 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_4 = 10S_2$ ，则 $\frac{S_6}{S_2}$ 的值为_____.

16. 一名学生参加学校社团活动，利用3D技术打印一个几何模型. 该模型由一个几何体 M 及其外接球 O 组成. 几何体 M 由一个内角都是 120° 的六边形 $ABCDEF$ 绕边 BC 旋转一周得到且满足 $AB = AF = DC = DE$ ， $BC = EF$ ，则球 O 与几何体 M 的体积之比为_____.

四、解答题：本题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\frac{\sin A}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin A} = 2\cos B + 1$.

(1) 求证： $b^2 = ac$ ；

(2) 若 $\frac{b^2}{a^2 + c^2} = \frac{2}{5}$ ，求 $\cos B$ 的值.

18. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{3a_n}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 1}{a_2}$ ， $\frac{2}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_3}$ ， $a_2 > 0$.

(1) 求证：数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列；

(2) 求数列 $\{a_n a_{n+1}\}$ 的前 n 项和 S_n .

19. (12分) 甲、乙两个学校进行球类运动比赛，比赛共设足球、篮球、排球三个项目，每个项目胜方得100分，负方得0分，没有平局，三个项目比赛结束后，总得分高的学校获得冠军. 已知甲校在三个项目中获胜的概率分别为0.4, 0.6, 0.5，各项目比赛互不影响.

(1) 求乙获得冠军的概率；

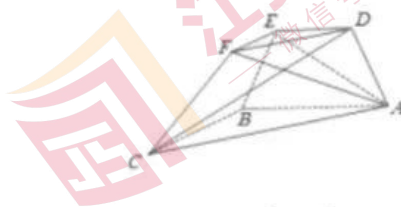
(2) 用 X 表示甲校的总得分，求 X 的分布列与期望.

20. (12分) 如图, 在三棱台 $ABC-DEF$ 中, 已知平面 $ABED \perp$ 平面 $BCFE$, $BA \perp BC$,

$$BC=3, BE=DE=DA=\frac{1}{2}AB=1.$$

(1) 求证: 直线 $AE \perp$ 平面 $BCFE$;

(2) 求平面 CDF 与平面 AEF 所成角的正弦值.



21. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 过点 $P(-2,0)$ 的直线 l 与曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左支

交于 A, B 两点, 直线 OA 与双曲线 C 的右支交于点 D . 已知双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{2}$, 当直线 l

与 x 轴垂直时, $|BD| = \sqrt{2}|AB|$.

(1) 求双曲线 C 的标准方程;

(2) 证明: 直线 BD 与圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 相切.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{6}ax^3$ (a 为非零常数), 记 $f_{n+1}(x) = f'_n(x) (n \in \mathbb{N})$,

$$f_0(x) = f(x).$$

(1) 当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的最大值;

(2) 当 $a=1$ 时, 设 $g_n(x) = \sum_{i=2}^n f_i(x)$, 对任意的 $n \geq 3$, 当 $x=t_n$ 时, $y=g_n(x)$ 取得最小值,

证明: $g_n(t_n) > 0$ 且所有点 $(t_n, g_n(t_n))$ 在一条定直线上;

(3) 若函数 $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ 都存在极小值, 求实数 a 的取值范围.