Z20 名校联盟（浙江省名校新高考研究联盟）2024 届高三第一次联考

数学参考答案

选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	**A**	**C**	**A**	**D**	**B**	**D**	**B**	**AC**	**ABC**	**ABD**	**ACD**

填空题

13．-1　　14．20　　15．140　　16．$\frac{1}{2}$

部分小题详解：

7．解析：将 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{5}$ 平方得 $1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{25}$，所以 $2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{24}{25}$，则 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$。

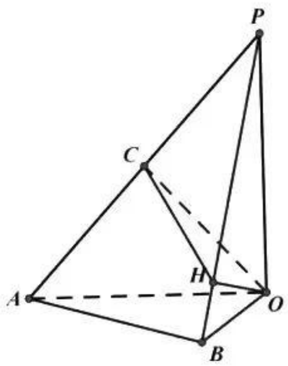
所以 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=1+\frac{24}{25}=\frac{49}{25}$，从而 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{5}$。

联立 $\begin{cases}\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{5}\\ \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{5}\end{cases}$，得 $\begin{cases}\sin\alpha=\frac{4}{5}\\ \cos\alpha=\frac{3}{5}\end{cases}$。

所以 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{24}{25}$，$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(\frac{3}{5})^2-(\frac{4}{5})^2=-\frac{7}{25}$。

故 $\sin(2\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2\alpha-\cos 2\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times[\frac{24}{25}-(-\frac{7}{25})]=\frac{31\sqrt{2}}{50}$，

故选 D。



8．解析：因为 $PO\perp$ 平面 ABO，$AB\subset$ 平面 ABO，

所以 $PO\perp AB$，又 $OB\perp BA$，

$OB\cap PO=O$，$OB,PO\subset$ 平面 BOP，

所以 $AB\perp$ 平面 BOP，又 $OH\subset$ 平面 BOP，

则 $AB\perp OH$，又 $OH\perp BP$，而 $AB\cap BP=B$，

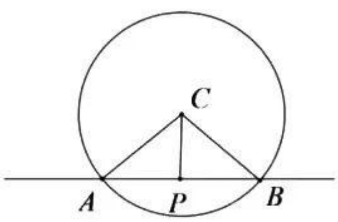
$AB,BP\subset$ 平面 ABP，所以 $OH\perp$ 平面 ABP，

又 $CH\subset$ 平面 ABP，所以 $OH\perp CH$，

则 $OH^2+CH^2=OC^2=4$，

所以 $V_{P-OCH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot OH\cdot CH\cdot h\le\frac{1}{6}\cdot OH\cdot CH\cdot PC\le\frac{1}{6}\cdot\frac{OH^2+CH^2}{2}\times 2=\frac{2}{3}$，

当且仅当 $OH=CH$ 且 $PC\perp$ 平面 COH 时，取"="，故选 B。



10．解析：直线 l 的方程可化为 $(2x+y-7)m+(x+y-4)=0$，

联立 $\begin{cases}2x+y-7=0\\ x+y-4=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases}$，

所以直线恒过定点 $(3,1)$，则 A 正确；

当直线 l 过圆心 C 时，直线被圆截得的弦长最长，

此时 $2m+1+2(m+1)-7m-4=0$，解得，$m=-\frac{1}{3}$，则 B 正确；

当直线 $l \perp CP$ 时，直线被圆截得的弦长最短，直线 l 的斜率为

$k=-\frac{2m+1}{m+1}, k_{CP}=\frac{1-2}{3-1}=-\frac{1}{2}$，由 $-\frac{2m+1}{m+1}\cdot(-\frac{1}{2})=-1$，解得 $m=-\frac{3}{4}$，则 C 正确；

此时直线 l 的方程是 $2x-y-5=0$，

圆心 $C(1,2)$ 到直线 $2x-y-5=0$ 的距离为 $d=\frac{|2-2-5|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，

$|AP|=|BP|=\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{25-5}=2\sqrt{5}$，

所以最短弦长是 $|AB|=2|AP|=4\sqrt{5}$，则 D 不正确。

故选 ABC。

11．解析：数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都是等比数列，设公比分别为 q_1、q_2（q_1、q_2 均不为 0）

对于 A，由 $c_n=a_nb_n$，则 $\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_nb_n}=q_1q_2$，所以数列 $\{c_n\}$ 为等比数列；

对于 B，由 $d_n=\frac{a_n}{b_n}$，则 $\frac{d_{n+1}}{d_n}=\frac{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}}{\frac{a_n}{b_n}}=\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\times\frac{b_n}{a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{b_n}{b_{n+1}}=q_1\cdot\frac{1}{q_2}=\frac{q_1}{q_2}$，

所以数列 $\{d_n\}$ 为等比数列；

对于 C，举反例：$a_n=(-1)^n$，则 $S_2=S_4-S_2=S_6-S_4=0$，不成等比数列；

对于 D，$\frac{a_{n+k+1}}{a_n}=q_1^{k+1}$ 为常数，D 正确。

故选 ABD。

17．解：

（1）由题意知，$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，则 $\omega=2$，…………………………………………………………1 分

又 $f(\frac{\pi}{6})=2\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)=2$，

则 $\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，所以 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in Z$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，….2 分

则 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，

由三角函数的性质可得：$2x+\frac{\pi}{6}\in[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}]$，$k\in Z$。

解得：$k\pi-\frac{\pi}{3}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$，

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}],k\in \mathbf{Z}$ ……………………………………4 分

（2）由 $af(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6})+c=2b$ 得，$2a\sin(C+\frac{\pi}{2})+c=2b$，即 $2a\cos C+c=2b$，……………5 分

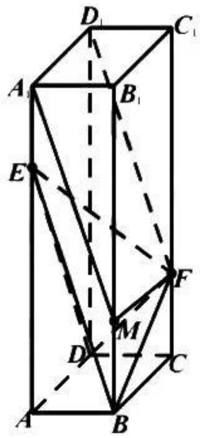
结合正弦定理得，$2\sin A\cos C+\sin C=2\sin B=2\sin(A+C)$，……………………………7 分

即 $\sin C(2\cos A-1)=0$，又 $\sin C>0$，所以 $2\cos A-1=0$，即 $\cos A=\frac{1}{2}$，…………8 分

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$，则 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}b=3\sqrt{3}$，所以 $b=3$，

由余弦定理有，$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{3^2+4^2-2\times3\times4\times\dfrac{1}{2}}=\sqrt{13}$。…………10 分

18．解：



（1）如图，在棱 BB_1 上取点 M，使得 $BM=CF$，

又 $BM//CF$，所以四边形 $BMFC$ 为平行四边形，……………………2 分

则 $MF//BC$ 且 $MF=BC$，又 $BC//A_1D_1$ 且 $BC=A_1D_1$，

所以 $MF//A_1D_1$ 且 $MF=A_1D_1$，

则四边形 A_1D_1FM 为平行四边形，所以 $A_1M//D_1F$，……………4 分

同理可证四边形 A_1MBE 为平行四边形，

则 $BE//A_1M$，所以 $BE//D_1F$。……………………………………6 分

（2）以 DA 为 x 轴，DC 为 y 轴，DD_1 为 z 轴建立空间直角坐标系，

则 $D(0,0,0)$，$B(2,1,0)$，$E(2,0,3)$，$F(0,1,1)$，……………………7 分

$\overrightarrow{DE}=(2,0,3)$，$\overrightarrow{DF}=(0,1,1)$，设平面 DEF 的法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{DE}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{DF}\end{cases}$ 得，$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=2x_1+3z_1=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DF}=y_1+z_1=0\end{cases}$，解得，$\begin{cases}x_1=-\dfrac{3}{2}z_1\\ y_1=-z_1\end{cases}$，

令 $z_1=2$，则 $\vec{n}=(-3,-2,2)$，………………………………………9 分

$\overrightarrow{BD}=(-2,-1,0)$，$\overrightarrow{BF}=(-2,0,1)$，设平面 BDF 的法向量为 $\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$，

由 $\begin{cases}\vec{m}\perp\overrightarrow{BD}\\ \vec{m}\perp\overrightarrow{BF}\end{cases}$ 得，$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BD}=-2x_2-y_2=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BF}=-2x_2+z_2=0\end{cases}$，解得，$\begin{cases}x_2=-\dfrac{1}{2}y_2\\ x_2=\dfrac{1}{2}z_2\end{cases}$，

令 $x_2=1$，则 $\vec{m}=(1,-2,2)$，……………………………………………………11 分

设两个平面夹角大小为 θ，则 $\cos\theta=|\cos<\vec{n},\vec{m}>|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\dfrac{5}{3\sqrt{17}}=\dfrac{5}{51}\sqrt{17}$ …12 分

19．解析：

（1）$\because a_{n+1}=\dfrac{na_n}{(n+1)(na_n+1)}(n\in N^*)$，

$\therefore \dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{(n+1)na_n+(n+1)}{na_n}=(n+1)+\dfrac{n+1}{na_n}$

即 $\dfrac{1}{(n+1)a_{n+1}}-\dfrac{1}{na_n}=1$，又 $\dfrac{1}{1\bullet a_1}=2$，……………………………………………3 分

$\therefore$ 数列 $\{\dfrac{1}{na_n}\}$ 是以 2 为首项，1 为公差的等差数列，

$\therefore \dfrac{1}{na_n}=2+(n-1)=n+1$，……………………………………………………5 分

$\therefore a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$．……………………………………………………6分

（2）$S_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$ ……………………………………8分

$\dfrac{16}{n(n+1)}+(n-1)n\geq\lambda\dfrac{n}{n+1}$ ……………………………………………………9分

所以 $\lambda\leq\dfrac{16}{n^2}+n^2-1$ ……………………………………………………10分

$\dfrac{16}{n^2}+n^2-1\geq 8-1=7$，当 $n=2$ 时取等，所以：$\lambda\leq 7$ ………………12分

20．解：

（1）此时，$f(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$，$f'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$ ……………………………………………………2分

所以，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增……………………………………………3分

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减……………………………………………4分

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减…………………………………………5分

（2）$f'(x)=\dfrac{a(1-a-\ln x)}{x^2}$ ……………………………………………………………6分

因为 $a>0$，所以当 $x\in(0,e^{1-a})$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(e^{1-a},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$

所以 $f(x)_{\max}=f(e^{1-a})=\dfrac{a}{e^{1-a}}$ ……………………………………………………7分

下证：$\dfrac{a}{e^{1-a}}\leq e^{2a-2}$，即证：$e^{a-1}\geq a$ ……………………………………………8分

记 $g(a)=e^{a-1}-a$，$g'(a)=e^{a-1}-1$，……………………………………………………10分

当 $a\in(0,1)$ 时，$g'(a)<0$，当 $a\in(1,+\infty)$ 时，$g'(a)>0$ ……………………………………11分

所以 $g(a)_{\min}=g(1)=0$，所以 $g(a)\geq 0$ 恒成立，即 $e^{a-1}\geq a$ …………………………12分

21．解：

（1）记 $A=$“甲被抽中”，$A_i=$“第 i 次被抽中”（$i=1,2$），则

$P(\overline{A})=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=\dfrac{C_{N-1}^{20}}{C_N^{20}}\cdot\dfrac{C_{N-1}^{20}}{C_N^{20}}=\dfrac{N-20}{N}\cdot\dfrac{N-20}{N}=\dfrac{16}{25}$，……………………………4分

解得 $N=100$ ……………………………………………………………………5分

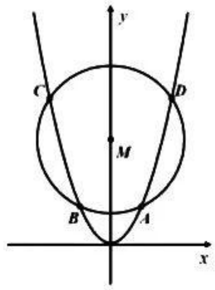
（2）$P(X=30)=\dfrac{C_N^{20}C_{N-20}^{10}C_{20}^{10}}{C_N^{20}C_N^{20}}=\dfrac{C_{N-20}^{10}C_{20}^{10}}{C_N^{20}}$ ……………………………………………7分

记 $f(N)=\dfrac{C_{N-20}^{10}}{C_N^{20}}$，即求 $f(N)$ 在何时取到最大值。

$$\frac{f(N+1)}{f(N)}=\frac{C_{N-19}^{10}C_N^{20}}{C_{N+1}^{20}C_{N-20}^{10}}=\frac{\dfrac{(N-19)!}{10!(N-29)!}\cdot\dfrac{N!}{20!(N-20)!}}{\dfrac{(N+1)!}{20!(N-19)!}\cdot\dfrac{(N-20)!}{10!(N-30)!}}=\frac{(N-19)(N-19)}{(N+1)(N-29)}\geq 1$$ ……10分

解得 $N\leq 39$，所以，当 $N=39$或40时，$P(X=30)$ 取到最大值。……………12分

22.【答案】



（1）$\sqrt{3}+2$ （2）不可能 （3）$r=\dfrac{\sqrt{527}}{6}$

【详解】

（1）将 $y=x^2$ 代入 $x^2+(y-4)^2=4$，并化简得 $y^2-7y+12=0$，解得 $y=3$ 或 $y=4$，代入抛物线方程可得

$A\left(\sqrt{3},3\right),B\left(-\sqrt{3},3\right),C\left(-2,4\right),D\left(2,4\right)$ ……………………2 分

故 $S=\dfrac{1}{2}(2\sqrt{3}+4)\times(4-3)=\sqrt{3}+2$； ……………………………4 分

（2）联立抛物线与圆的方程有 $y^2-7y+16-r^2=0$，可得 $y_1y_2=16-r^2$.

不妨设 E 与 M 的四个交点的坐标为 $A(\sqrt{y_1},y_1),B(-\sqrt{y_1},y_1),C(-\sqrt{y_2},y_2),D(\sqrt{y_2},y_2)$.

直线 AC 的方程为 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{-\sqrt{y_2}-\sqrt{y_1}}\cdot(x-\sqrt{y_1})$， ………………6 分

由对称性，对角线交点肯定在 y 轴上，令 $x=0$，

解得交点坐标为 $(0,\sqrt{y_1y_2})$．若交点为 M 点，则 $y_1y_2=16$，则 $r=0$，不可能。…7 分

（3）联立抛物线与圆的方程有 $y^2-7y+16-r^2=0$，可得 $y_1y_2=16-r^2$.

由于四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，因而其面积 $S=\dfrac{1}{2}\cdot(2\sqrt{y_1}+2\sqrt{y_2})\cdot|y_2-y_1|$ ………8 分

则 $S^2=(y_1+y_2+2\sqrt{y_1y_2})\cdot[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]$ ………………………………………………9 分

设 $t=\sqrt{y_1y_2}$，则 $t=\sqrt{16-r^2}$，$0<t<\dfrac{7}{2}$

将 $y_1+y_2=7,\sqrt{y_1y_2}=t$ 代入上式，并令 $f(t)=S^2$，

得 $f(t)=(7+2t)^2\cdot(7-2t)(0<t<\dfrac{7}{2})$ ………………………………………………………10 分

求导数，$f'(t)=-2(2t+7)(6t-7)$ 令 $f'(t)=0$，解得：$t=\dfrac{7}{6},t=-\dfrac{7}{2}$（舍去）.

当 $0<t<\dfrac{7}{6}$ 时，$f'(t)>0$；当 $t=\dfrac{7}{6}$ 时，$f'(t)=0$；当 $\dfrac{7}{6}<t<\dfrac{7}{2}$ 时，$f'(t)<0$.

故当且仅当 $t=\dfrac{7}{6}$ 时，此时 $r=\dfrac{\sqrt{527}}{6}$. …………………………………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**浙江官方微信号：**zjgkjzb**。