

秘密★启用前

试卷类型: B

2019 年广州市普通高中毕业班综合测试 (二)

理科数学

2019. 4

本试卷共 6 页, 23 小题, 满分 150 分。考试用时 120 分钟。

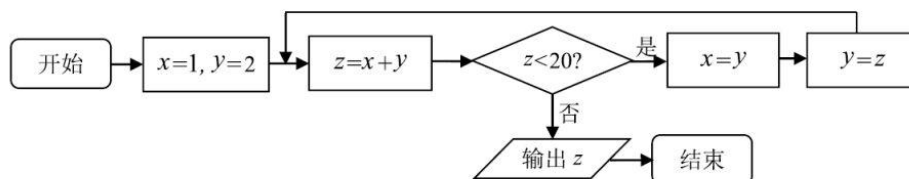
- 注意事项:** 1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名和考生号、试室号、座位号填写在答题卡上, 用 2B 铅笔在答题卡的相应位置填涂考生号, 并将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。
2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新答案; 不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后, 将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z = m(3+i) - (2+i)$ 在复平面内对应的点在第三象限, 则实数 m 的取值范围是
- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, \frac{2}{3})$ C. $(\frac{2}{3}, 1)$ D. $(-\infty, \frac{2}{3}) \cup (1, +\infty)$
2. 已知集合 $A = \left\{ x \mid 1 - \frac{8}{x-2} < 0 \right\}$, 则 $\complement_{\mathbb{R}} A =$
- A. $\{x \mid x < 2 \text{ 或 } x \geq 6\}$ B. $\{x \mid x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 6\}$
- C. $\{x \mid x < 2 \text{ 或 } x \geq 10\}$ D. $\{x \mid x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 10\}$
3. 某公司生产 A, B, C 三种不同型号的轿车, 产量之比依次为 2:3:4, 为检验该公司的产品质量, 用分层抽样的方法抽取一个容量为 n 的样本, 若样本中 A 种型号的轿车比 B 种型号的轿车少 8 辆, 则 $n =$
- A. 96 B. 72 C. 48 D. 36

理科数学试题 B 第 1 页 (共 6 页)

4. 执行如图所示的程序框图，则输出 z 的值是



- A. 21 B. 22 C. 23 D. 24

5. 已知点 A 与点 $B(1, 2)$ 关于直线 $x + y + 3 = 0$ 对称，则点 A 的坐标为

- A. $(3, 4)$ B. $(4, 5)$ C. $(-4, -3)$ D. $(-5, -4)$

6. 从某班 6 名学生（其中男生 4 人，女生 2 人）中任选 3 人参加学校组织的社会实践活动。设所选 3 人中女生人数为 ξ ，则数学期望 $E\xi =$

- A. $\frac{4}{5}$ B. 1 C. $\frac{7}{5}$ D. 2

7. 已知 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$ ，其中 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ，则 $\tan 2\alpha =$

- A. $-\frac{24}{7}$ B. $-\frac{4}{3}$ C. $\frac{7}{24}$ D. $\frac{24}{7}$

8. 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点 F 作圆 $x^2 + y^2 = -\frac{a^2}{9}$ 的切线，切点为 E ，延长 FE 交双曲线右支于点 P ，若 $\overrightarrow{FP} = 2\overrightarrow{FE}$ ，则双曲线的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{17}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{17}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

9. 若曲线 $y = x^3 - 2x^2 + 2$ 在点 A 处的切线方程为 $y = 4x - 6$ ，且点 A 在直线

$mx + ny - 1 = 0$ （其中 $m > 0, n > 0$ ）上，则 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为

- A. $4\sqrt{2}$ B. $3 + 2\sqrt{2}$ C. $6 + 4\sqrt{2}$ D. $8\sqrt{2}$

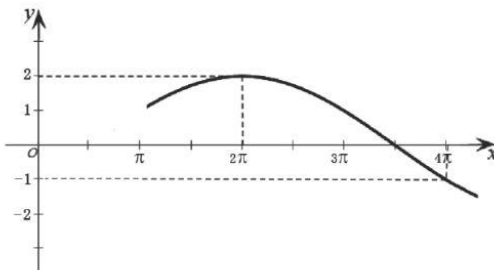
10. 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \pi$) 的部分图像如图所示, 先把函数 $y = f(x)$ 图像上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的图像向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 得到函数 $y = g(x)$ 的图像, 则函数 $y = g(x)$ 的图像的一条对称轴为

A. $x = \frac{3\pi}{4}$

B. $x = \frac{\pi}{4}$

C. $x = -\frac{\pi}{4}$

D. $x = -\frac{3\pi}{4}$



11. 已知点 P 在直线 $x + 2y - 1 = 0$ 上, 点 Q 在直线 $x + 2y + 3 = 0$ 上, PQ 的中点为 $M(x_0, y_0)$, 且 $1 \leq y_0 - x_0 \leq 7$, 则 $\frac{y_0}{x_0}$ 的取值范围为

A. $\left[2, \frac{12}{5}\right]$

B. $\left[-\frac{2}{5}, 0\right]$

C. $\left[-\frac{5}{16}, \frac{1}{4}\right]$

D. $\left[-2, \frac{2}{5}\right]$

12. 若点 $A(t, 0)$ 与曲线 $y = e^x$ 上点 P 的距离的最小值为 $2\sqrt{3}$, 则实数 t 的值为

A. $4 - \frac{\ln 2}{3}$

B. $4 - \frac{\ln 2}{2}$

C. $3 + \frac{\ln 3}{3}$

D. $3 + \frac{\ln 3}{2}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若 e_1, e_2 是夹角为 60° 的两个单位向量, 向量 $a = 2e_1 + e_2$, 则 $|a| =$ _____.

14. 若 $(ax - 1)^5$ 的展开式中 x^3 的系数是 80, 则实数 a 的值是_____.

15. 秦九韶是我国南宋著名数学家, 在他的著作《数书九章》中有已知三边求三角形面积的方法: “以小斜幂并大斜幂减中斜幂, 余半之, 自乘于上. 以小斜幂乘大斜幂减上, 余四约之, 为实. 一为从隅, 开平方得积.” 如果把以上这段文字写成公式就是

$$S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[a^2 c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \right)^2 \right]}, \text{ 其中 } a, b, c \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的内角 } A, B, C \text{ 的对边.}$$

若 $\sin C = 2 \sin A \cos B$, 且 $b^2, 1, c^2$ 成等差数列, 则 $\triangle ABC$ 面积 S 的最大值为_____.

16. 有一个底面半径为 R , 轴截面为正三角形的圆锥纸盒, 在该纸盒内放一个棱长均为 a 的四面体, 并且四面体在纸盒内可以任意转动, 则 a 的最大值为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程和演算步骤。第 17 ~ 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (本小题满分 12 分)

已知 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列， $a_2 + a_3 = 4$ ， $a_1 a_4 = 3$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

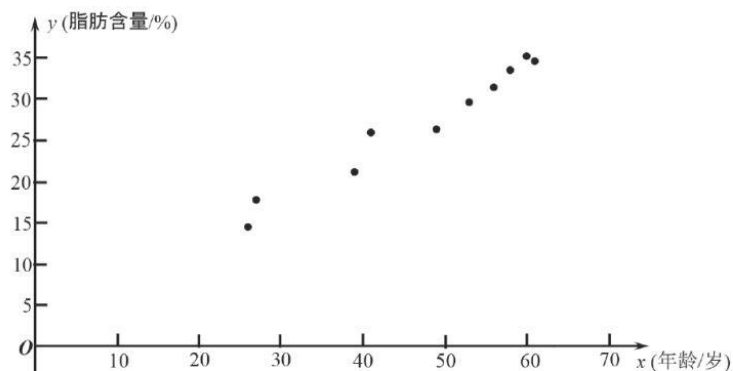
(2) 令 $b_n = na_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

18. (本小题满分 12 分)

科研人员在对人体脂肪含量和年龄之间关系的研究中，获得了一些年龄和脂肪含量的简单随机样本数据，如下表：

x (年龄 / 岁)	26	27	39	41	49	53	56	58	60	61
y (脂肪含量 / %)	14.5	17.8	21.2	25.9	26.3	29.6	31.4	33.5	35.2	34.6

根据上表的数据得到如下的散点图。



(1) 根据上表中的样本数据及其散点图：

(i) 求 $\bar{x}$ ；

(ii) 计算样本相关系数 (精确到 0.01)，并刻画它们的相关程度。

(2) 若 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 1.56 + \hat{b}x$ ，求 $\hat{b}$ 的值 (精确到 0.01)，并根据回归方程估计年龄为 50 岁时人体的脂肪含量。

附:

参考数据: $\bar{y} = 27$, $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 13527.8$, $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 23638$, $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 7759.6$, $\sqrt{43} \approx 6.56$,

$\sqrt{2935} \approx 54.18$.

参考公式: 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n(\bar{y})^2}}$.

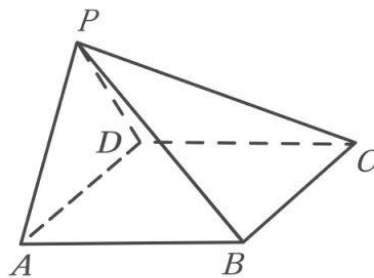
回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$,

$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle APD = 90^\circ$, 且 $AD = PB$.

- (1) 求证: 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$;
- (2) 若 $AD \perp PB$, 求二面角 $D-PB-C$ 的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系中, 动点 M 分别与两个定点 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ 的连线的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$.

- (1) 求动点 M 的轨迹 C 的方程;
- (2) 设过点 $(-1, 0)$ 的直线与轨迹 C 交于 P , Q 两点, 判断直线 $x = -\frac{5}{2}$ 与以线段 PQ 为直径的圆的位置关系, 并说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{k}{x^2}$ ($k \in \mathbf{R}$).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 求 k 的取值范围, 并证明 $x_1 + x_2 > 2\sqrt{-2k}$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (本小题满分 10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 倾斜角为 α 的直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + t \cos \alpha, \\ y = \sqrt{3} + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数).

在以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 = 2\rho \cos \theta + 8$.

(1) 求直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 若直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 4\sqrt{2}$, 求直线 l 的倾斜角.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = |2x - 1| - a$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 解不等式 $f(x) > x + 1$;

(2) 若存在实数 x , 使得 $f(x) < \frac{1}{2}f(x+1)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

绝密 ★ 启用前

2019 年广州市普通高中毕业班综合测试（二）

理科数学试题答案及评分参考

评分说明:

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考, 如果考生的解法与本解答不同, 可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则.
2. 对计算题, 当考生的解答在某一步出现错误时, 如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度, 可视影响的程度决定后继部分的给分, 但不得超过该部分正确解答应得分数的一半; 如果后继部分的解答有较严重的错误, 就不再给分.
3. 解答右端所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数.
4. 只给整数分数, 选择题不给中间分.

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	B	A	D	B	D	A	C	C	B	D

二、填空题

13. $\sqrt{7}$ 14. 2 15. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 16. $\frac{2\sqrt{2}}{3}R$

三、解答题

17. 解法 1: (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

$$\text{因为 } a_2 + a_3 = 4, \quad a_1 a_4 = 3,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} a_1 q + a_1 q^2 = 4, \\ a_1 \cdot a_1 q^3 = 3. \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = 9, \\ q = \frac{1}{3}, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_1 = \frac{1}{3}, \\ q = 3. \end{cases} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

因为 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列,

$$\text{所以 } a_1 = \frac{1}{3}, \quad q = 3. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{所以数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = 3^{n-2}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

解法 2: (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

因为 $a_2 + a_3 = 4$, $a_1 a_4 = a_2 a_3 = 3$,

所以 a_2, a_3 是方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 的两个根.2 分

解得 $\begin{cases} a_2 = 1, \\ a_3 = 3, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_2 = 3, \\ a_3 = 1. \end{cases}$ 4 分

因为 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列,

所以 $a_2 = 1, a_3 = 3$, 则 $q = 3$5 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3^{n-2}$6 分

(2) 由 (1) 知 $b_n = n \times 3^{n-2}$7 分

则 $S_n = 1 \times 3^{-1} + 2 \times 3^0 + 3 \times 3^1 + \dots + n \times 3^{n-2}$,8 分

在①式两边同时乘以 3 得,

$3S_n = 1 \times 3^0 + 2 \times 3^1 + 3 \times 3^2 + \dots + n \times 3^{n-1}$,9 分

①-②得 $-2S_n = 3^{-1} + 3^0 + 3^1 + \dots + 3^{n-2} - n \times 3^{n-1}$,10 分

即 $-2S_n = \frac{1}{3} \frac{(1-3^n)}{1-3} - n \times 3^{n-1}$,11 分

所以 $S_n = \frac{1}{4} (2n-1) \times 3^{n-1} + \frac{1}{12}$12 分

18. 解: (1) 根据上表中的样本数据及其散点图:

(i) $\bar{x} = \frac{26+27+39+41+49+53+56+58+60+61}{10} = 47$2 分

(ii) $r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2}} = \frac{13527.8 - 10 \times 47 \times 27}{\sqrt{23638 - 10 \times 47^2} \sqrt{7759.6 - 10 \times 27^2}}$ 3 分

$= \frac{13527.8 - 12690}{\sqrt{23638 - 22090} \sqrt{7759.6 - 7290}} = \frac{837.8}{\sqrt{1548} \times \sqrt{469.6}}$ 4 分

$= \frac{8378}{6\sqrt{43} \times 4\sqrt{2935}}$ 5 分

因为 $\sqrt{43} \approx 6.56$, $\sqrt{2935} \approx 54.18$,

所以 $r \approx 0.98$6 分

由样本相关系数 $r \approx 0.98$, 可以推断人体脂肪含量和年龄的相关程度很强.7 分

(2) 因为回归方程为 $\hat{y} = 1.56 + \hat{b}x$, 即 $\hat{a} = 1.56$.

所以 $\hat{b} = \frac{\bar{y} - \hat{a}}{\bar{x}} = \frac{27 - 1.56}{47} \approx 0.54$.

【或利用 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2} = \frac{837.8}{1548} \approx 0.54$ 】10 分

所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 0.54x + 1.56$.

将 $x = 50$ 代入线性回归方程得 $\hat{y} = 0.54 \times 50 + 1.56 = 28.56$11 分

所以根据回归方程预测年龄为 50 岁时人的脂肪含量为 28.56%.12 分

19. (1) 证明: 取 AD 中点 O , 连结 OP , OB , BD ,

因为底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle BAD = 60^\circ$,

所以 $AD = AB = BD$.

因为 O 为 AD 的中点,

所以 $OB \perp AD$1 分

在 $\triangle APD$ 中, $\angle APD = 90^\circ$, O 为 AD 的中点,

所以 $PO = \frac{1}{2}AD = AO$.

设 $AD = PB = 2a$, 则 $OB = \sqrt{3}a$, $PO = OA = a$,

因为 $PO^2 + OB^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 = PB^2$, 所以 $OP \perp OB$2 分

【2 分段另证: 在 $\triangle APD$ 中, $\angle APD = 90^\circ$, O 为 AD 的中点, 所以 $PO = \frac{1}{2}AD = AO$.

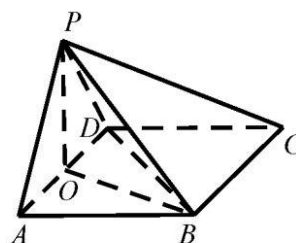
在 $\triangle BOP$ 和 $\triangle BOA$ 中, 因为 $PO = AO$, $PB = AD = AB$, $BO = BO$, 所以 $\triangle BOP \cong \triangle BOA$.

所以 $\angle BOP = \angle BOA = 90^\circ$. 所以 $OP \perp OB$.】

因为 $OP \cap AD = O$, $OP \subset$ 平面 PAD , $AD \subset$ 平面 PAD ,

所以 $OB \perp$ 平面 PAD3 分

因为 $OB \subset$ 平面 $ABCD$,



所以平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$4 分

(2) 解法 1: 因为 $AD \perp PB$, $AD \perp OB$, $OB \cap PB = B$,

$PB \subset$ 平面 POB , $OB \subset$ 平面 POB ,

所以 $AD \perp$ 平面 POB .

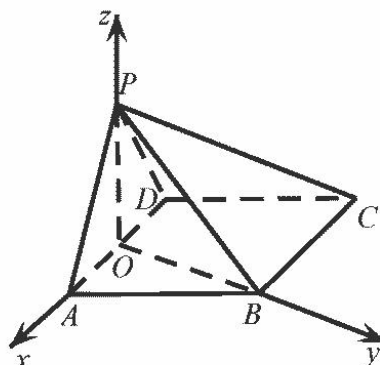
所以 $PO \perp AD$.

由 (1) 得 $PO \perp OB$, $AD \perp OB$,

所以 OA , OB , OP 所在的直线两两互相垂直.

.....5 分

以 O 为坐标原点, 分别以 OA , OB , OP 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.6 分



设 $AD = 2$, 则 $A(1, 0, 0)$, $D(-1, 0, 0)$, $B(0, \sqrt{3}, 0)$, $P(0, 0, 1)$7 分

所以 $\overrightarrow{PD} = (-1, 0, -1)$, $\overrightarrow{PB} = (0, \sqrt{3}, -1)$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = (-2, 0, 0)$8 分

设平面 PBD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PD} = -x_1 - z_1 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PB} = \sqrt{3}y_1 - z_1 = 0, \end{cases} \quad \text{令 } y_1 = 1, \text{ 则 } x_1 = -\sqrt{3}, z_1 = \sqrt{3},$$

所以 $\mathbf{n} = (-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$9 分

设平面 PBC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BC} = -2x_2 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PB} = \sqrt{3}y_2 - z_2 = 0, \end{cases} \quad \text{令 } y_2 = 1, \text{ 则 } x_2 = 0, z_2 = \sqrt{3},$$

所以 $\mathbf{m} = (0, 1, \sqrt{3})$10 分

设二面角 $D-PB-C$ 为 θ , 由于 θ 为锐角,

所以 $\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle|$11 分

$$= \frac{4}{2 \times \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

所以二面角 $D-PB-C$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$12 分

数学 (理科) 答案 A 第 4 页 共 15 页

解法 2: 因为 $AD \perp PB$, $AD \perp OB$, $OB \cap PB = B$, $PB \subset$ 平面 POB , $OB \subset$ 平面 POB ,

所以 $AD \perp$ 平面 POB .

所以 $PO \perp AD$5 分

所以 $PO = a$, $PD = \sqrt{2}a$.

过点 D 作 $DH \perp PB$, H 为垂足,

过点 H 作 $HG \parallel BC$ 交 PC 于点 G , 连接 DG ,6 分

因为 $AD \perp PB$, $BC \parallel AD$,

所以 $BC \perp PB$, 即 $HG \perp PB$.

所以 $\angle DHG$ 为二面角 $D-PB-C$ 的平面角,7 分

在等腰 $\triangle BDP$ 中, $BD = BP = 2a$, $PD = \sqrt{2}a$,

根据等面积法可以求得 $DH = \frac{\sqrt{7}}{2}a$8 分

进而可以求得 $PH = \frac{1}{2}a$,

所以 $HG = \frac{1}{2}a$, $PG = \frac{\sqrt{2}}{2}a$9 分

在 $\triangle PDC$ 中, $PD = \sqrt{2}a$, $DC = 2a$, $PC = 2\sqrt{2}a$,

所以 $\cos \angle DPC = \frac{PD^2 + PC^2 - DC^2}{2PD \times PC} = \frac{3}{4}$.

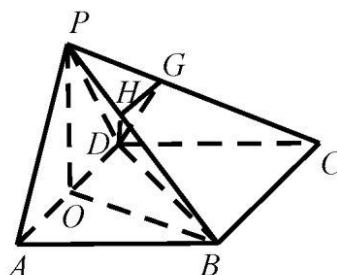
在 $\triangle PDG$ 中, $PD = \sqrt{2}a$, $PG = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, $\cos \angle DPC = \frac{3}{4}$,

所以 $DG^2 = PD^2 + PG^2 - 2PD \times PG \times \cos \angle DPG = a^2$, 即 $DG = a$10 分

在 $\triangle DHG$ 中, $DH = \frac{\sqrt{7}}{2}a$, $HG = \frac{1}{2}a$, $DG = a$,

所以 $\cos \angle DHG = \frac{DH^2 + HG^2 - DG^2}{2DH \times HG}$ 11 分

$$= \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$



所以二面角 $D-PB-C$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$12 分

20. 解: (1) 设动点 M 的坐标为 (x, y) ,

因为 $k_{MA} = \frac{y}{x+2} (x \neq -2)$, $k_{MB} = \frac{y}{x-2} (x \neq 2)$,1 分

所以 $k_{MA}k_{MB} = \frac{y}{x+2} \times \frac{y}{x-2} = -\frac{1}{2}$2 分

整理得 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$3 分

所以动点 M 的轨迹 C 的方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 (x \neq \pm 2 \text{ 或 } y \neq 0)$4 分

(2) 解法 1: 过点 $(-1, 0)$ 的直线为 x 轴时, 显然不合题意.5 分

所以可设过点 $(-1, 0)$ 的直线方程为 $x = my - 1$,

设直线 $x = my - 1$ 与轨迹 C 的交点坐标为 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

由 $\begin{cases} x = my - 1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases}$ 得 $(m^2 + 2)y^2 - 2my - 3 = 0$6 分

因为 $\Delta = (-2m)^2 + 12(m^2 + 2) > 0$,

由韦达定理得 $y_1 + y_2 = \frac{2m}{m^2 + 2}$, $y_1 y_2 = -\frac{3}{m^2 + 2}$7 分

注意到 $x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) - 2 = \frac{-4}{m^2 + 2}$.

所以 PQ 的中点坐标为 $N\left(\frac{-2}{m^2 + 2}, \frac{m}{m^2 + 2}\right)$8 分

因为 $|PQ| = \sqrt{1+m^2} |y_1 - y_2| = \sqrt{(1+m^2) \left[\left(\frac{2m}{m^2+2}\right)^2 + \frac{12}{m^2+2} \right]}$

$$= \frac{2\sqrt{(1+m^2)(4m^2+6)}}{m^2+2}$$
.9 分

点 N 到直线 $x = -\frac{5}{2}$ 的距离为 $d = \frac{5}{2} - \frac{2}{m^2+2} = \frac{5m^2+6}{2(m^2+2)}$10 分

因为 $d^2 - \frac{|PQ|^2}{4} = \frac{9m^4 + 20m^2 + 12}{4(m^2 + 2)^2} > 0$,11 分

即 $d > \frac{|PQ|}{2}$, 所以直线 $x = -\frac{5}{2}$ 与以线段 PQ 为直径的圆相离.12 分

解法 2: ①当过点 $(-1, 0)$ 的直线斜率不存在时, 直线方程为 $x = -1$, 与 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 交于 $P\left(-1, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

和 $Q\left(-1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 两点, 此时直线 $x = -\frac{5}{2}$ 与以线段 PQ 为直径的圆相离.5 分

②当过点 $(-1, 0)$ 的直线斜率存在时, 设其方程为 $y = k(x + 1)$,

设直线 $y = k(x + 1)$ 与轨迹 C 的交点坐标为 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

由 $\begin{cases} y = k(x + 1), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases}$ 得 $(2k^2 + 1)x^2 + 4k^2x + (2k^2 - 4) = 0$6 分

因为 $\Delta = (4k^2)^2 - 4(2k^2 + 1)(2k^2 - 4) = 24k^2 + 16 > 0$,

由韦达定理得 $x_1 + x_2 = -\frac{4k^2}{2k^2 + 1}$, $x_1x_2 = \frac{2k^2 - 4}{2k^2 + 1}$7 分

注意到 $y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2k = \frac{2k}{2k^2 + 1}$.

所以 PQ 的中点坐标为 $N\left(\frac{-2k^2}{2k^2 + 1}, \frac{k}{2k^2 + 1}\right)$8 分

因为 $|PQ| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{(1 + k^2) \left[\left(\frac{4k^2}{2k^2 + 1} \right)^2 - \frac{4(2k^2 - 4)}{2k^2 + 1} \right]} = \frac{2\sqrt{(1 + k^2)(6k^2 + 4)}}{2k^2 + 1}$. 9 分

点 N 到直线 $x = -\frac{5}{2}$ 的距离为 $d = \frac{5}{2} - \frac{2k^2}{2k^2 + 1} = \frac{6k^2 + 5}{2(2k^2 + 1)}$10 分

因为 $d^2 - \frac{|PQ|^2}{4} = \frac{12k^4 + 20k^2 + 9}{4(2k^2 + 1)^2} > 0$,11 分

即 $d > \frac{|PQ|}{2}$, 所以直线 $x = -\frac{5}{2}$ 与以线段 PQ 为直径的圆相离.12 分

21. (1) 解: 因为 $f(x) = \ln x - \frac{k}{x^2}$, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,
 所以 $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2k}{x^3} = \frac{x^2 + 2k}{x^3}$, $x > 0$1 分
 当 $k \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$,
 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.2 分
 当 $k < 0$ 时, 由 $f'(x) = 0$, 得 $x = \sqrt{-2k}$ (负根舍去),
 当 $x \in (0, \sqrt{-2k})$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (\sqrt{-2k}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,
 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{-2k})$ 上单调递减; 在 $(\sqrt{-2k}, +\infty)$ 上单调递增.3 分
 综上所述, 当 $k \geq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; 当 $k < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{-2k})$ 上单
 调递减, 在 $(\sqrt{-2k}, +\infty)$ 上单调递增.4 分

(2) 先求 k 的取值范围:

【方法 1】由 (1) 知, 当 $k \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 不可能有两个零点, 不满足条件.
5 分

当 $k < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{-2k})$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{-2k}, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{\min} = f(\sqrt{-2k}) = \ln \sqrt{-2k} + \frac{1}{2}$.

要使函数 $f(x)$ 有两个零点, 首先 $f(x)_{\min} = \ln \sqrt{-2k} + \frac{1}{2} < 0$, 解得 $-\frac{1}{2e} < k < 0$6 分

因为 $-2k < \sqrt{-2k} < 1$, 且 $f(1) = -k > 0$,

下面证明 $f(-2k) = \ln(-2k) - \frac{1}{4k} > 0$.

设 $g(k) = \ln(-2k) - \frac{1}{4k}$, 则 $g'(k) = \frac{1}{k} + \frac{1}{4k^2} = \frac{4k+1}{4k^2}$.

因为 $k > -\frac{1}{2e}$, 所以 $g'(k) = \frac{1}{k} + \frac{1}{4k^2} = \frac{4k+1}{4k^2} > \frac{-\frac{2}{e}+1}{4k^2} > 0$.

所以 $g(k)$ 在 $(-\frac{1}{2e}, 0)$ 上单调递增,

所以 $f(-2k) = g(k) > g(-\frac{1}{2e}) = \ln \frac{1}{e} + \frac{e}{2} > 0$.

数学(理科)答案 A 第 8 页 共 15 页

【若考生书写为：因为当 $x \rightarrow 0^+$ 时， $f(x) \rightarrow +\infty$ ，且 $f(1) = -k > 0$ ，此处不扣分】

所以 k 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{2e}, 0\right)$ 。.....7 分

【方法 2】由 $f(x) = \ln x - \frac{k}{x^2} = 0$ ，得到 $k = x^2 \ln x$ 。.....5 分

设 $g(x) = x^2 \ln x$ ，则 $g'(x) = x(2 \ln x + 1)$ 。

当 $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$ 时， $g'(x) < 0$ ，当 $x > e^{-\frac{1}{2}}$ 时， $g'(x) > 0$ ，

所以函数 $g(x)$ 在 $\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ 上单调递增。

所以由 $[g(x)]_{\min} = g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e}$ 。.....6 分

因为 $x \rightarrow 0^+$ 时， $g(x) \rightarrow 0$ ，且 $g(1) = 0$ ，

要使函数 $f(x)$ 有两个零点，必有 $-\frac{1}{2e} < k < 0$ 。

所以 k 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{2e}, 0\right)$ 。.....7 分

再证明 $x_1 + x_2 > 2\sqrt{-2k}$ ：

【方法 1】因为 x_1, x_2 是函数 $f(x)$ 的两个零点，不妨设 $x_1 < x_2$ ，令 $x_2 = tx_1$ ，则 $t > 1$ 。

所以 $\begin{cases} \ln x_1 - \frac{k}{x_1^2} = 0, \\ \ln x_2 - \frac{k}{x_2^2} = 0, \end{cases}$ 即 $\ln x_2 - \ln x_1 = \frac{k}{x_2^2} - \frac{k}{x_1^2}$ 。.....8 分

所以 $\ln t = \frac{k}{t^2 x_1^2} - \frac{k}{x_1^2}$ ，即 $x_1^2 = \frac{k}{\ln t} \left(\frac{1}{t^2} - 1\right)$ ， $-\frac{1}{2e} < k < 0$ ， $t > 1$ 。

要证 $x_1 + x_2 > 2\sqrt{-2k}$ ，即证 $(x_1 + x_2)^2 > -8k$ 。.....9 分

即证 $x_1^2 (1+t)^2 > -8k$ ，即证 $\frac{k}{\ln t} \left(\frac{1}{t^2} - 1\right) (1+t)^2 > -8k$ 。

因为 $-\frac{1}{2e} < k < 0$ ，所以即证 $\left(\frac{1}{t^2} - 1\right) (1+t)^2 < -8 \ln t$ ，

数学（理科）答案 A 第 9 页 共 15 页

或证 $8\ln t + \left(\frac{1}{t^2} - 1\right)(1+t)^2 < 0 \ (t > 1)$10 分

设 $h(t) = 8\ln t + \left(\frac{1}{t^2} - 1\right)(1+t)^2, \ t > 1$.

即 $h(t) = 8\ln t - t^2 - 2t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}, \ t > 1$.

所以 $h'(t) = \frac{8}{t} - 2t - 2 - \frac{2}{t^2} - \frac{2}{t^3} = \frac{-2(t^2-1)^2 - 2t(t-1)^2}{t^3} < 0$.

【用其他方法判断 $h'(t) < 0$ 均可, 如令分子为 $u(t)$, 通过多次求导判断】

所以 $h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,11 分

所以 $h(t) = 8\ln t + \left(\frac{1}{t^2} - 1\right)(1+t)^2 < h(1) = 0, \ t > 1$.

所以 $x_1 + x_2 > 2\sqrt{-2k}$12 分

【方法 2】因为 x_1, x_2 是函数 $f(x)$ 有两个零点, 不妨设 $x_1 < x_2$, 令 $x_2 = tx_1$, 则 $t > 1$.

所以 $\begin{cases} \ln x_1 - \frac{k}{x_1^2} = 0, \\ \ln x_2 - \frac{k}{x_2^2} = 0, \end{cases}$ 即 $\ln x_2 - \ln x_1 = \frac{k}{x_2^2} - \frac{k}{x_1^2}$8 分

所以 $\ln t = \frac{k}{t^2 x_1^2} - \frac{k}{x_1^2}$, 即 $x_1^2 = \frac{k}{\ln t} \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right), \ -\frac{1}{2e} < k < 0, \ t > 1$.

要证 $x_1 + x_2 > 2\sqrt{-2k}$, 需证 $\sqrt{x_1 x_2} > \sqrt{-2k}$9 分

即证 $tx_1^2 > -2k$, 即证 $t \times \frac{k}{\ln t} \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) > -2k$.

因为 $-\frac{1}{2e} < k < 0$, 所以即证 $t - \frac{1}{t} > 2\ln t \ (t > 1)$10 分

设 $h(t) = 2\ln t - t + \frac{1}{t}$,

则 $h'(t) = \frac{2}{t} - 1 - \frac{1}{t^2} = -\frac{(t-1)^2}{t^2} < 0, \ t > 1$.

所以 $h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,11 分

数学(理科)答案 A 第 10 页 共 15 页

所以 $h(t) = 2\ln t - t + \frac{1}{t} < h(1) = 0$.

所以 $x_1 + x_2 > 2\sqrt{-2k}$12 分

【方法 3】因为 x_1, x_2 是函数 $f(x)$ 有两个零点, 不妨设 $x_1 < x_2$, 令 $x_2 = tx_1$, 则 $t > 1$.

$$\text{所以 } \begin{cases} \ln x_1 - \frac{k}{x_1^2} = 0, \\ \ln x_2 - \frac{k}{x_2^2} = 0. \end{cases} \quad \text{即 } \ln x_1 + \ln x_2 = \frac{k}{x_1^2} + \frac{k}{x_2^2}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

要证 $x_1 + x_2 > 2\sqrt{-2k}$, 需证 $\sqrt{x_1 x_2} > \sqrt{-2k}$9 分

只需证 $\ln x_1 + \ln x_2 > \ln(-2k)$.

即证 $\frac{k}{x_1^2} + \frac{k}{x_2^2} > \ln(-2k)$, 即证 $\frac{k}{x_1^2} + \frac{k}{tx_1^2} > \ln(-2k)$.

即证 $k \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \frac{1}{x_1^2} > \ln(-2k)$10 分

因为 $\sqrt{-2k} < x_1 < 0$, 所以 $x_1^2 < -2k$, 即 $\frac{1}{x_1^2} > \frac{1}{-2k}$11 分

所以 $k \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \frac{1}{x_1^2} > k \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \times \frac{1}{-2k} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) > -\frac{1}{2}(1+1) = -1$.

而 $\ln(-2k) < \ln \frac{1}{e} = -1$.

所以 $k \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \frac{1}{x_1^2} > \ln(-2k)$ 成立.

所以 $x_1 + x_2 > 2\sqrt{-2k}$12 分

【方法 4】因为 x_1, x_2 是函数 $f(x)$ 有两个零点, 不妨设 $x_1 < x_2$, 令 $x_2 = tx_1$, 则 $t > 1$.

$$\text{由已知得 } \begin{cases} \ln x_1 - \frac{k}{x_1^2} = 0, \\ \ln x_2 - \frac{k}{x_2^2} = 0, \end{cases} \quad \text{即 } \ln x_2 - \ln x_1 = \frac{k}{x_2^2} - \frac{k}{x_1^2}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

先证明 $\frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} < \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}}$, 即证明 $\ln t < \frac{t-1}{\sqrt{t}} (t > 1)$.

$$\text{设 } h(t) = \frac{t-1}{\sqrt{t}} - \ln t, \text{ 则 } h'(t) = \frac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}} > 0.$$

所以 $h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $h(t) > h(1) = 0$, 所证不等式成立.9 分

$$\text{所以有 } \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} = \frac{-k(x_1 + x_2)}{x_1^2 x_2^2} < \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{即 } -k(x_1 + x_2) < (\sqrt{x_1 x_2})^3.$$

$$\text{因为 } \sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (x_1 \neq x_2), \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } -k(x_1 + x_2) < \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^3, \text{ 即 } (x_1 + x_2)^2 > -8k.$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 > 2\sqrt{-2k}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

【方法 5】 要证 $x_1 + x_2 > 2\sqrt{-2k}$, 其中 $x_1 \in (0, \sqrt{-2k})$, $x_2 \in (\sqrt{-2k}, +\infty)$.

$$\text{即证 } x_2 > 2\sqrt{-2k} - x_1. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

利用函数 $f(x)$ 的单调性, 只需证明 $f(x_2) > f(2\sqrt{-2k} - x_1)$.

因为 $f(x_2) = f(x_1)$, 所以只要证明 $f(x_1) > f(2\sqrt{-2k} - x_1)$, 其中 $x_1 \in (0, \sqrt{-2k})$9 分

$$\text{构造函数 } F(x) = f(x) - f(2\sqrt{-2k} - x), \quad x \in (0, \sqrt{-2k}),$$

$$\text{则 } F(x) = \ln x - \frac{k}{x^2} - \ln(2\sqrt{-2k} - x) + \frac{k}{(2\sqrt{-2k} - x)^2}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } F'(x) &= \frac{1}{x} + \frac{2k}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{-2k} - x} + \frac{2k}{(2\sqrt{-2k} - x)^3} \\ &= \frac{2\sqrt{-2k}}{x(2\sqrt{-2k} - x)} + \frac{4k\sqrt{-2k} \left[(2\sqrt{-2k} - x)^2 - x(2\sqrt{-2k} - x) + x^2 \right]}{x^3 (2\sqrt{-2k} - x)^3} \quad (\text{利用均值不等式}) \\ &< \frac{2\sqrt{-2k}}{x(2\sqrt{-2k} - x)} + \frac{4k\sqrt{-2k}}{x^2 (2\sqrt{-2k} - x)^2} \\ &= -\frac{2\sqrt{-2k} (x - \sqrt{-2k})^2}{x^2 (2\sqrt{-2k} - x)^2} < 0, \end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 在 $(0, \sqrt{-2k})$ 上单调递减.11 分

所以 $F(x) > F(\sqrt{-2k}) = \ln \sqrt{-2k} + \frac{1}{2} - \ln \sqrt{-2k} - \frac{1}{2} = 0$.

所以 $f(x) > f(2\sqrt{-2k} - x)$ 在 $(0, \sqrt{-2k})$ 上恒成立.

所以要证的不等式 $x_1 + x_2 > 2\sqrt{-2k}$ 成立.12 分

22. (1) 解法 1: 因为直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + t \cos \alpha, \\ y = \sqrt{3} + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数),

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 直线 l 的直角坐标方程为 $x = 2$1 分

当 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ 时, 直线 l 的直角坐标方程为 $y - \sqrt{3} = \tan \alpha (x - 2)$3 分

因为 $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\rho \cos \theta = x$,4 分

因为 $\rho^2 = 2\rho \cos \theta + 8$, 所以 $x^2 + y^2 = 2x + 8$.

所以 C 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$5 分

解法 2: 因为直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + t \cos \alpha, \\ y = \sqrt{3} + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数),

则有 $\begin{cases} x \sin \alpha = 2 \sin \alpha + t \sin \alpha \cos \alpha, \\ y \cos \alpha = \sqrt{3} \cos \alpha + t \sin \alpha \cos \alpha, \end{cases}$ 2 分

所以直线 l 的直角坐标方程为 $x \sin \alpha - y \cos \alpha - (2 \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha) = 0$3 分

因为 $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\rho \cos \theta = x$,4 分

因为 $\rho^2 = 2\rho \cos \theta + 8$, 所以 $x^2 + y^2 = 2x + 8$.

所以 C 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$5 分

(2) 解法 1: 曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$,

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的方程整理, 得 $t^2 + (2\sqrt{3} \sin \alpha + 2 \cos \alpha)t - 5 = 0$6 分

因为 $\Delta = (2\sqrt{3} \sin \alpha + 2 \cos \alpha)^2 + 20 > 0$, 可设该方程的两个根为 t_1, t_2 ,

则 $t_1 + t_2 = -(2\sqrt{3} \sin \alpha + 2 \cos \alpha)$, $t_1 t_2 = -5$7 分

数学(理科)答案 A 第 13 页 共 15 页

$$\begin{aligned} \text{所以 } |AB| &= |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} \\ &= \sqrt{[-(2\sqrt{3}\sin\alpha + 2\cos\alpha)]^2 + 20} = 4\sqrt{2}. \end{aligned} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{整理得 } (\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 3,$$

$$\text{故 } 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \pm\sqrt{3}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } 0 \leq \alpha < \pi, \text{ 所以 } \alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{解得 } \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{综上所述, 直线 } l \text{ 的倾斜角为 } \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \frac{\pi}{2}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

解法 2: 直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 4\sqrt{2}$.

$$\text{故圆心 } C(1,0) \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \sqrt{9 - (2\sqrt{2})^2} = 1. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{①当 } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ 时, 直线 } l \text{ 的直角坐标方程为 } x = 2, \text{ 符合题意.} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{②当 } \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ 时, 直线 } l \text{ 的方程为 } x \tan \alpha - y + \sqrt{3} - 2 \tan \alpha = 0.$$

$$\text{所以 } d = \frac{|\tan \alpha - 0 + \sqrt{3} - 2 \tan \alpha|}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = 1, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{整理得 } |\sqrt{3} - \tan \alpha| = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}.$$

$$\text{解得 } \alpha = \frac{\pi}{6}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{综上所述, 直线 } l \text{ 的倾斜角为 } \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \frac{\pi}{2}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

23. (1) 解: 当 $a=1$ 时, 由 $f(x) > x$, 得 $|2x-1|-1 > x+1$. $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$$\text{当 } x \geq \frac{1}{2} \text{ 时, } 2x-1-1 > x+1, \text{ 解得 } x > 3.$$

$$\text{当 } x < \frac{1}{2} \text{ 时, } 1-2x-1 > x+1, \text{ 解得 } x < -\frac{1}{3}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

综上所述, 不等式 $f(x) > x+1$ 的解集为 $\left\{x \mid x > 3 \text{ 或 } x < -\frac{1}{3}\right\}$5 分

(2) 解法 1: 由 $f(x) < \frac{1}{2}f(x+1)$, 得 $|2x-1| - a < \frac{1}{2}|2x+1| - \frac{a}{2}$.

则 $a > 2|2x-1| - |2x+1|$6 分

令 $g(x) = 2|2x-1| - |2x+1|$,

则问题等价于 $a > (g(x))_{\min}$

因为 $g(x) = \begin{cases} -2x+3, & x < -\frac{1}{2}, \\ -6x+1, & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2x-3, & x > \frac{1}{2}, \end{cases}$ 9 分

$g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{2}\right) = -2$.

所以实数 a 的取值范围为 $(-2, +\infty)$10 分

解法 2: 因为 $||2x-1| - |2x+1|| \leq |(2x-1) - (2x+1)|$,6 分

即 $-2 \leq |2x-1| - |2x+1| \leq 2$, 则 $|2x-1| - |2x+1| \geq -2$7 分

所以 $g(x) = |2x-1| - |2x+1| + |2x-1| \geq -2 + |2x-1| \geq -2$8 分

当且仅当 $x = \frac{1}{2}$ 时等号成立.9 分

所以 $g(x)_{\min} = -2$.

所以实数 a 的取值范围为 $(-2, +\infty)$10 分

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注