机密 ★ 启用前 **姓名_________准考证号___________**

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

数学(文)风向卷（二）

注意事项：

1．答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题(本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1．已知集合 $A=\{x|x^2-4x-5\leq 0\}$，$B=\{x|x>1\}$，则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=($　　$)$

A．$[-1，1]$　　B．$[-5，1]$

C．$\{1\}$　　D．$(-\infty，5]$

【答案】A

【解析】本题考查集合的交集、补集运算．

$A=\{x|x^2-4x-5\leq 0\}=\{x|-1\leq x\leq 5\}$．

因为 $B=\{x|x>1\}$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x\leq 1\}$，

所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=[-1，1]$．故选 A．

2．复数 z 满足 $(2+i)z=i-3$(i 为虚数单位)，则 $|z|=($　　$)$

A．1　B．$\sqrt{2}$

C．2　D．$\sqrt{5}$

【答案】B

【解析】本题考查复数的基本运算．

由题意知 $z=\frac{i-3}{2+i}=\frac{(i-3)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{-5+5i}{5}=-1+i$，

所以 $|z|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$.故选 B.

3．若实数 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geq 1,\\ y-x\leq 1,\\ x\leq 1,\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最小值为(　　)

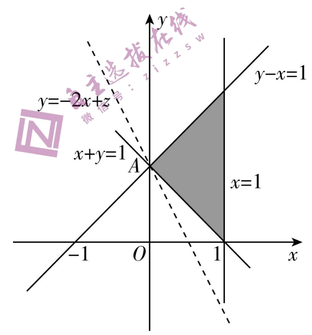
A．1　　B．2

C．3　　D．4

【答案】A

【解析】本题考查线性规划问题.

由约束条件 $\begin{cases}x+y\geq 1,\\ y-x\leq 1,\\ x\leq 1\end{cases}$ 作出可行域如图中阴影部分所示(包括边界).



由题得 $y=-2x+z$，表示斜率为-2，纵截距为 z 的直线，

当直线经过点 A 时，直线的纵截距最小，即 z 最小.

联立 $\begin{cases}x+y=1,\\ y-x=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\ y=1,\end{cases}$ 则 $A(0，1)$，

所以 z 的最小值为$-2\times 0+1=1$.故选 A.

4．接种疫苗是防控新冠疫情有效的方法之一，我国自 2021 年 1 月开始实施全民免费接种新冠病毒疫苗工作．某地为方便居民接种，共设置了 A，B，C，D 四个疫苗接种点，每位接种者可去任一个接种点接种．若甲、乙两人去接种新冠病毒疫苗，则两人不在同一接种点接种新冠病毒疫苗的概率为(　　)

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

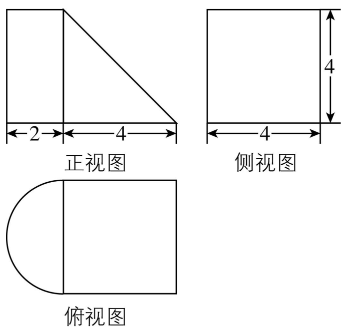
【答案】D

【考点】本题考查古典概型

【详解】由题意，甲、乙两人去 A，B，C，D 四个接种点接种新冠病毒疫苗的所有不同结果为 AA，AB，AC，AD，BA，BB，BC，BD，CA，CB，CC，CD，DA，DB，DC，DD，共 16 种，

其中两人不在同一接种点接种新冠病毒疫苗的情况有 12 种．由古典概型概率计算公式可得所求概率 $P=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$.故选 D.

5．某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是(　　)



A．$8\pi+32$　　B．$16\pi+32$　　C．$8\pi+\frac{64}{3}$　　D．$16\pi+\frac{64}{3}$

【答案】A

【考点】几何体的三视图、几何体体积的计算

【详解】由题中三视图可知，该几何体是组合体，左边是底面半径为 2，高为 4 的圆柱的一半，右边是三棱柱，三棱柱的底面是腰为 4 的等腰直角三角形，高为 4，所以半个圆柱的体积 $V_1=\frac{1}{2}\times\pi\times2^2\times4=8\pi$，三棱柱的体积 $V_2=\frac{1}{2}\times4\times4\times4=32$.所以该几何体的体积 $V=8\pi+32$.故选 A.

6．在梯形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{n}$，则$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=$(　　)

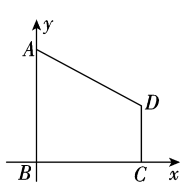
A．$-\frac{1}{2}\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$　　B．$\frac{1}{2}\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$　　C．$\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$　　D．$-\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$

【答案】A

【考点】平面向量的线性运算

【详解】$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$，故选 A.

【快解】不妨设梯形 $ABCD$ 为直角梯形，其中 B 为直角，如图建立平面直角坐标系，



设 $AB=a$，$BC=b$，则 $DC=\frac{a}{2}$，$B(0，0)$，$A(0，a)$，$C(b，0)$，$D(b,\frac{a}{2})$，$\overrightarrow{AC}=(b，-a)$，$\overrightarrow{BD}=(b,\frac{a}{2})$，$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=(2b,-\frac{a}{2})$，$\overrightarrow{AB}=(0，-a)$，$\overrightarrow{AD}=(b,-\frac{a}{2})$，所以$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=2n-\frac{1}{2}m$，故选 A.

7．已知 $0°\le\alpha<90°$，且 $\sin 36°(1+\sin 2\alpha)=2\cos^2 18°\cos 2\alpha$，则$\alpha=$(　　)

A．18°　　B．27°　　C．54°　　D．63°

【答案】B

【考点】二倍角公式、两角和与差的正弦、余弦公式

【详解】因为 $\sin 36°(1+\sin 2α)=2\sin 18°\cos 18°(1+\sin 2α)$，所以 $2\cos^2 18°\cos 2α=2\sin 18°\cos 18°(1+\sin 2α)$，即 $\cos 18°\cos 2α=\sin 18°\sin 2α+\sin 18°$，所以 $\cos 18°\cos 2\alpha-\sin 18°\sin 2\alpha=\sin 18°$，则 $\cos(2α+18°)=\sin 18°$.因为 $0°\le\alpha<90°$，所以 $18°\le2α+18°<198°$，所以 $2α+18°=90°-18°$，解得$\alpha=27°$，故选 B.

【一题多解】因为 $\sin 36°(1+\sin 2\alpha)=2\sin 18°\cos 18°(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$，$2\cos^2 18°\cos 2\alpha=2\cos^2 18°(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$，所以 $2\sin 18°\cos 18°(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=2\cos^2 18°\cdot(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$，即 $\sin 18°(\sin\alpha+\cos\alpha)=\cos 18°(\cos\alpha-\sin\alpha)$. 所以$\frac{\sin18°}{\cos18°}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$，即 $\tan 18°=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\tan(45°-\alpha)$. 因为 $0°\le\alpha<90°$，所以$-45°<45°-\alpha\le45°$，所以 $18°=45°-\alpha$，即$\alpha=45°-18°=27°$，故选 B.

8．已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_4=3$，$S_{n-4}=12$，$S_n=17$，则 n 的值为(　　)

A．8　　B．11　　C．13　　D．17

【答案】D

【考点】本题考查等差数列的性质和求和公式

【详解】根据题意，$S_4=3$，$S_{n-4}=12$，$S_n=17$，则 $S_n-S_{n-4}=5$，即 $a_1+a_2+a_3+a_4=3$，$a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}=5$，两式相加得到 $4(a_1+a_n)=8$，则 $a_1+a_n=2$，$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=17$，解得 $n=17$.故选 D.

9．已知在菱形 $ABCD$ 中，$AB=AC=2$，将其沿对角线 AC 折成四面体 $ABCD$，使得 $BD=2$. 若该四面体的所有顶点在同一个球面上，则该球的表面积为(　　)

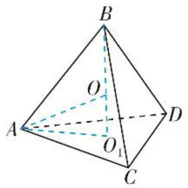
A．8π　　B．4π　　C．6π　　D．$\frac{10}{3}\pi$

【答案】C

【考点】正四面体的外接球及球的表面积

【详解】因为四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $AB=2$，所以 $BC=CD=AD=2$.又四面体 $ABCD$ 中 AC

$=BD=2$，所以四面体 $ABCD$ 为棱长为 2 的正四面体．



如图，设 O_1 为等边三角形 ACD 的中心，则 $AO_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$BO_1=\sqrt{AB^2-AO_1^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.设该四面体的外接球球心为 O，则 $O\in BO_1$.设该四面体的外接球半径为 R，则 $OO_1=BO_1-R=\frac{2\sqrt{6}}{3}-R$.在 $Rt\triangle AOO_1$ 中，$R^2=\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}-R\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$，解得 $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以外接球的表面积为 $4\pi R^2=4\pi\times\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=6\pi$，故选 C．

【一题多解】因为四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $AB=2$，所以 $BC=CD=AD=2$.又四面体 $ABCD$ 中 $AC=BD=2$，所以四面体 $ABCD$ 为棱长为 2 的正四面体．如图，将其补形为正方体，则该四面体的外接球与正方体的外接球相同，且正方体的面对角线为 2，故其棱长为$\sqrt{2}$.因为正方体的外接球的直径为其体对角线，且其长度为$\sqrt{6}$，所以正方体的外接球的半径为$\frac{\sqrt{6}}{2}$，其表面积为 6π，所以正四面体的外接球的表面积为 6π，故选 C．

10．双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过点 F_1 的直线与双曲线 C 的右支在第一象限的交点为 A，与 y 轴的交点为 B，且 B 为线段 AF_1 的中点．若$\triangle ABF_2$ 的周长为 $6a$，则双曲线 C 的渐近线方程为(　　)

A．$y=\pm\sqrt{3}x$　　B．$y=\pm\sqrt{2}x$　　C．$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$　　D．$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

【答案】B

【考点】本题考查双曲线定义及渐近线方程

【详解】如图所示，由对称性可知$|BF_2|=|BF_1|$.因为$\triangle ABF_2$ 的周长为 $6a$，所以$|AF_1|+|AF_2|=6a$.又$|AF_1|-|AF_2|=2a$，所以$|AF_1|=4a$，$|AF_2|=2a$.

因为 B 为线段 AF_1 的中点，

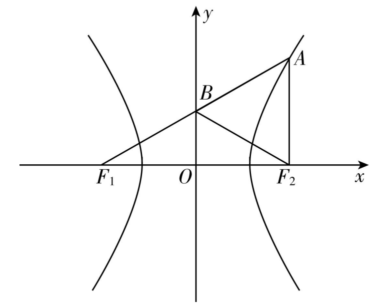
所以$|AB|=|BF_1|=2a$，则$\triangle ABF_2$ 为等边三角形，

所以$\angle ABF_2=\frac{\pi}{3}$，$\angle F_1BF_2=\frac{2\pi}{3}$，则$\angle F_1BO=\frac{\pi}{3}$.

又因为$|OF_1|=c$，所以在 $Rt\triangle F_1BO$ 中，

$\sin\angle F_1BO=\frac{|OF_1|}{|BF_1|}=\frac{c}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$\frac{c}{a}=\sqrt{3}$，所以$\frac{b}{a}=\sqrt{2}$，

即双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$.故选 B．



11．在三棱锥 $S-ABC$ 中，$SB=BC=SA$，SM，AM，BN，CN 分别是$\angle BSC$，$\angle BAC$，$\angle SBA$，$\angle SCA$ 的平分线，$SA\perp$平面 BCN，$MN\perp BC$，则 AM，BN 所成角的余弦值为(　　)

A．$-\frac{8}{5}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{34}{5}$　　D．$\frac{2}{3}$

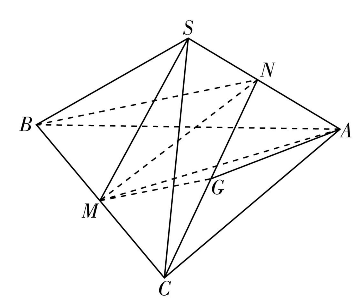
【答案】D

【考点】本题考查空间线面的位置关系、异面直线所成角的余弦值

【详解】 因为 $SA\perp$平面 BCN，$BC\subset$平面 BCN，所以 $SA\perp BC$．又因为 $BC\perp MN$，$MN\cap SA=N$，MN，$SA\subset$平面 SMA，故 $BC\perp$平面 SMA．所以 $BC\perp SM$，$BC\perp AM$.又$\angle BSM=\angle CSM$，$\angle BAM=\angle CAM$，故 $SB=SC$，$AB=AC$．同理可得，$SB=BA$，$SC=CA$．又 $SB=BC=SA$，所以 $SB=BA=SC=CA=BC=SA$，故该三棱锥 $S-ABC$ 为正四面体．

方法一：如图①，取 CN 的中点 G，连接 MG，AG，则 $MG\parallel BN$，故$\angle GMA$ 即为 BN 与 AM 所成角或其补角．设 $AB=2$，则 $MG=\frac{1}{2}BN=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$MA=\sqrt{3}$，$NA=1$，$NG=\frac{1}{2}CN=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $AG=\sqrt{NG^2+NA^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.在$\triangle MGA$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle GMA=\frac{3+\frac{3}{4}-\frac{7}{4}}{2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{3}$.

故选 D．

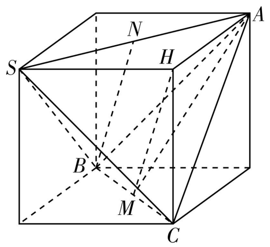


图①

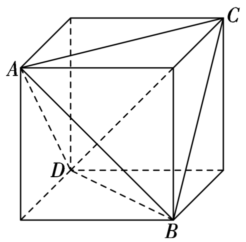
方法二：将三棱锥 $S-ABC$ 置于正方体中，如图②，易得 $MH\parallel BN$，

则$\angle HMA$ 即为 BN 与 AM 所成角或其补角．设 $AB=2$，得正方体的棱长为$\sqrt{2}$，则 $AM=MH=\sqrt{3}$，

在$\triangle MHA$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle HMA=\frac{3+3-2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2}{3}$.故选 D.



图②



【方法速记】求解正四面体的外接球半径，可以先找到球心(球心在正四面体的高上)，然后利用勾股定理求解；也可以将正四面体补形成正方体，利用正方体的体对角线长为正四面体外接球的直径进行求解．

12．已知有且只有一个实数 x 满足 $x^3-ax-1=0$，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$(-\infty，2)$　　B．$\left(-\infty,-\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\right)$　　C．$(-\infty，2]$　　D．$\left(-\infty,\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\right)$

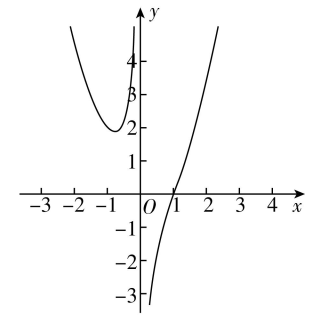
【答案】D

【思路导引】

由题意$\to a=x^2-\frac{1}{x}$有一个实根$\to$令 $f(x)=x^2-\frac{1}{x}\to f'(x)\to f(x)$的单调性和图像$\to a$ 的范围

【考点】利用导数研究函数的单调性、方程根的个数

【详解】$x=0$ 显然不是 $x^3-ax-1=0$ 的根，所以 $x\neq0$.所以只有一个实数 x 满足 $x^3-ax-1=0$ 等价于方程 $a=x^2-\frac{1}{x}$只有一个实数根(提示：参变分离，将原问题转化为方程 $a=x^2-\frac{1}{x}$只有一个实数根)．令 $f(x)=x^2-\frac{1}{x}(x\neq0)$，则 $f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.当 $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当 $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},0\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当 $x\in(0，+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增．当 $x\to-\infty$时，$f(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，当 $x\to0^-$时，$f(x)\to+\infty$，当 $x\to0^+$时，$f(x)\to-\infty$，故 $f(x)$的大致图像如图所示．



故 $a<f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$，所以实数 a 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\right)$.故选 D.

二、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13．递增的等比数列$\{a_n\}$的每一项都是正数，设其前 n 项和为 S_n.若 $a_2+a_4=30$，$a_1a_5=81$，则 $S_6=$________．

【答案】364

【考点】本题考查等比数列的通项公式、求和公式

【详解】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，由 $a_1a_5=81$，得 $a_2a_4=81$.由$\begin{cases}a_2a_4=81,\\a_2+a_4=30,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_2=3,\\a_4=27\end{cases}$或$\begin{cases}a_2=27,\\a_4=3.\end{cases}$因为数列$\{a_n\}$为递增数列，所以$\begin{cases}a_2=3,\\a_4=27,\end{cases}$所以$\begin{cases}a_1q=3,\\a_1q^3=27,\end{cases}$得 $q^2=9$.因为等比数列$\{a_n\}$的每一项都是正数，所以 $q=3$，所以 $a_1=1$，所以 $S_6=\frac{1-3^6}{1-3}=364$.

14．若α满足 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{3}$，则 $\sin 2\alpha=$________．

【答案】$-\frac{4}{5}$

【考点】本题考查三角恒等变换

【详解】$\because\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{3}$，$\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{4})+\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{4})=1$，$\therefore\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\therefore\cos(2\alpha+\frac{\pi}{2})=2\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{4})-1=\frac{9}{5}-1=\frac{4}{5}$.又 $\cos(2\alpha+\frac{\pi}{2})=-\sin 2\alpha$，$\therefore\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$.

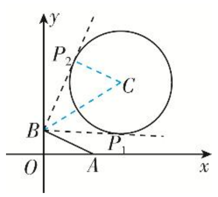
【一题多解】由 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{3}$，可得 $\tan\alpha=\tan[(\alpha+\frac{\pi}{4})-\frac{\pi}{4}]=\frac{\frac{1}{3}-1}{1+\frac{1}{3}\times1}=-\frac{1}{2}$，

所以 $\sin 2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=-\frac{4}{5}$.

15. 点 P 在圆 C: $(x-3)^2+(y-3)^2=4$ 上，$A(2,0)$，$B(0,1)$，则当∠PBA 最大时，$|PB|=$________.

【答案】3

【考点】直线和圆的位置关系、直线和圆相切求切线长



【详解】由题意可知圆心 $C(3,3)$，圆 C 的半径 $r=2$.已知 P 为圆 C 上一点，$A(2,0)$，$B(0,1)$.

如图，将 BA 绕点 B 沿逆时针方向旋转，当刚好与圆 C 相切于点 P_1 时，∠PBA 最小；当旋转到与圆 C 相切于点 P_2 时，∠PBA 最大．所以当∠PBA 最大时，直线 P_2B 与圆 C 相切(关键：根据题意，当∠PBA 最大时，直线 PB 与圆 C 相切)，则连接 CB，CP_2，$|P_2B|=\sqrt{|CB|^2-r^2}=\sqrt{13-4}=3$，即 $|PB|=3$.

16．已知 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$是椭圆 C：$\frac{x^2}{6}+y^2=1$ 上关于原点对称的两点，其中 $x_Ax_Ay_By_B\neq0$，过点 A 作与 AB 垂直的直线 l 与椭圆 C 交于点 D．若 k_{AB}，k_{BD} 分别表示直线 AB，BD 的斜率，则$\frac{k_{AB}}{k_{BD}}=$________.

【答案】6

【考点】本题考查椭圆的方程、直线的斜率、两直线的位置关系

【详解】令 $x_1=x_A$，$y_1=y_A$，则 $A(x_1,y_1)$，$B(-x_1,-y_1)$，设 $D(x_2,y_2)$，且 $x_2\neq\pm x_1$，$x_1\neq\pm\sqrt{6}$，$x_1\neq0$.

记直线 AD 的斜率为 $k_{AD.}$ 易得 $k_{AB}=\frac{y_1}{x_1}$，$k_{AD}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，$k_{BD}=\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}$.因为 $AB\perp AD$，所以 $k_{AB}\cdot k_{AD}=-1$.

又 $k_{AD}\cdot k_{BD}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\frac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}$，且$\begin{cases}\frac{x_1^2}{6}+y_1^2=1,\\ \frac{x_2^2}{6}+y_2^2=1,\end{cases}$所以$\frac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}=-\frac{1}{6}$，所以 $k_{AD}\cdot k_{BD}=-\frac{1}{6}$，所以$\frac{k_{AB}}{k_{BD}}=6$.

【归纳总结】解决圆锥曲线“中点弦”问题的思路：

思路一：根与系数的关系法：联立直线和圆锥曲线的方程得到方程组，消元得到一元二次方程后，由根与系数的关系及中点坐标公式求解

思路二：点差法：设直线与圆锥曲线的交点(弦的端点)坐标为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，将这两点坐标代入圆锥曲线的方程，并对所得两式作差，得到一个与弦AB的中点坐标和直线AB斜率有关的式子，可以大大减少计算量

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17．(本小题满分 12 分)在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $C=2A$.

(1)求证：$c=2a\cos A$；

(2)若 $A<B<C$，$b=10$，且 $a+c=2b$，求△ABC 的面积．

【考点】利用正弦定理、余弦定理解三角形，三角形面积公式的应用

【答案】

(1)【证明】因为 $C=2A$，由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{c}{2\sin A\cos A}$，

所以 $c=2a\cos$ A.

(2)【解】由(1)得 $\cos A=\frac{c}{2a}$，由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{100+c^2-a^2}{20c}$，

所以$\frac{c}{2a}=\frac{100+c^2-a^2}{20c}$，即$(10-a)c^2-100a+a^3=0$，

将 $a+c=20$，$c=20-a$ 代入，得$(10-a)(20-a)^2-100a+a^3=0$，

即$(a-10)(a-8)=0$，解得 $a=8$ 或 $a=10$.

因为 $B>A$，所以 $b>a$，则 $a=10$ 舍去，故 $a=8$，$c=20-8=12$.

从而 $\cos A=\frac{c}{2a}=\frac{12}{2\times8}=\frac{3}{4}>0$，可知 $0<A<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\sin A=\sqrt{1-cos^2A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

所以△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times10\times12\times\frac{\sqrt{7}}{4}=15\sqrt{7}$.

18. (本小题满分 12 分)2022 年教育部印发的《义务教育课程方案》，将劳动从原来的综合实践

活动课程中完全独立出来，并发布了《义务教育劳动课程标准(2022年版)》．此后，儿童厨具等劳动教育类玩具走俏市场，特别是“真煮”儿童厨具成了热销玩具．某儿童玩具批发商，统计了某品牌“真煮”儿童厨具6月份的销售情况，如表所示．

规格 x(件套)	19	22	28	36	45	48
销量 y(千件)	3.8	3.6	3.2	4.2	3.0	2.6

(1)根据相关系数 r，判断“真煮”儿童厨具的规格与销量间线性相关关系的强弱；(结果精确到0.01)

(2)由于受玩具实用性的影响，规格为36件套的销量出现异常，若将该组数据剔除，则剩余五组数据 y 与 x 之间具有线性相关关系，试根据表格，求出剩余五组数据 y 关于 x 的线性回归方程，并推测在没有受玩具的实用性的影响下，规格为36件套的销量的估计值．(系数精确到0.01)

参考公式：样本相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$ ($|r|\in[0.75,1]$，相关性很强；$|r|\in[0.3,0.75)$，相关性一般)．

经验回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$．

参考数据：$\sqrt{2.1}\approx1.45$，$\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i=652$，$\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2=7\ 254$．

【考点】相关系数的计算、线性回归方程的求解

【答案】

由题中表格，得 $\bar{x}=\dfrac{19+22+28+36+45+48}{6}=33$，

$\bar{y}=\dfrac{3.8+3.6+3.2+4.2+3.0+2.6}{6}=3.4$，

所以 $\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(-14)\times0.4+(-11)\times0.2+(-5)\times(-0.2)+3\times0.8+12\times(-0.4)+15\times(-0.8)=-21.2$，

$\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2=(-14)^2+(-11)^2+(-5)^2+3^2+12^2+15^2=720$，

$\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\bar{y})^2=0.4^2+0.2^2+(-0.2)^2+0.8^2+(-0.4)^2+(-0.8)^2=1.68$．

(1) $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\bar{y})^2}}=\dfrac{-21.2}{\sqrt{720\times1.68}}=\dfrac{-21.2}{24\sqrt{2.1}}\approx\dfrac{-21.2}{24\times1.45}\approx-0.61$，

因为 $|r|\in[0.3,0.75)$，所以“真煮”儿童厨具的规格与销量间线性相关性一般．

(2)五组数据的均值分别为 $\bar{x}'=32.4$，$\bar{y}'=3.24$，

$\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i-x_4y_4-5\bar{x}'\bar{y}'=652-36\times4.2-5\times32.4\times3.24=-24.08$，

$\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2-x_4^2-5\bar{x}'^2=7\ 254-36^2-5\times32.4^2=709.2$，

$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}'\bar{y}'}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}'^2}=\dfrac{-24.08}{709.2}\approx-0.03$，

$\hat{a}=\bar{y}'-\hat{b}\bar{x}'=3.24-(-0.03)\times32.4\approx4.21$，

所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=-0.03x+4.21$．

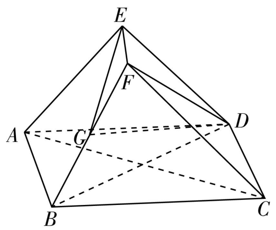
令 $x=36$，则 $\hat{y}=-0.03\times36+4.21=3.13$，

故在没有受玩具的实用性的影响下，规格为36件套的销量的估计值为3.13千件．

19．(本小题满分 12 分)如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$AC=2\sqrt{3}$，$\triangle ADE$ 为等腰直角三角形，$\angle AED=90°$，平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$，且 $EF\parallel AB$，$EF=1$.

(1)证明：$AC\perp$ 平面 BDF；

(2)若 G 为棱 BF 的中点，求三棱锥 $G-DEF$ 的体积.



【考点】本题考查空间线面的位置关系，几何体的体积

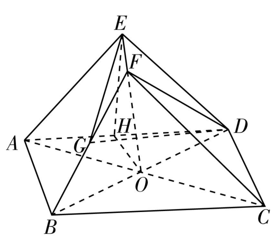
【答案】(1)【证明】如图，取 AD 的中点 H，连接 EH.因为$\triangle ADE$ 为等腰直角三角形，$\angle AED=90°$，所以 $EH\perp A$D．因为平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $ADE\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$EH\subset$ 平面 PDE，所以 $EH\perp$ 平面 ABCD.

设 AC，BD 的交点为 O，连接 OF，OH，则 $OH\parallel AB$，且 $OH=\frac{1}{2}AB=1$.因为 $EF\parallel AB$，$EF=1$，所以 $EF\parallel OH$，且 $EF=OH$，所以四边形 $EFOH$ 为平行四边形.

故 $FO\parallel EH$，所以 $FO\perp$ 平面 $ABCD$，又 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $FO\perp AC$.

在菱形 $ABCD$ 中，有 $AC\perp B$D.

又因为 $FO\cap BD=O$，FO，$BD\subset$ 平面 BDF，所以 $AC\perp$ 平面 BDF.



(2)【解】因为 $AB=BC=2$，$AC=2\sqrt{3}$，所以 $BO=1$，$BD=2$.

又$\triangle ADE$ 为等腰直角三角形，$\angle AED=90°$，$AD=2$，所以 $EH=1$，所以 $FO=1$.又 $EH\parallel FO$，$FO\subset$ 平面 BDF，$EH\not\subset$ 平面 BDF，所以 $EH\parallel$ 平面 BDF.

又 G 为棱 BF 的中点，

所以 $V_{G-DEF}=\frac{1}{2}V_{B-DEF}=\frac{1}{2}V_{E-BDF}=\frac{1}{2}V_{H-BDF}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}V_{A-BDF}=\frac{1}{4}V_{F-ABD}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times1=\frac{\sqrt{3}}{12}$.

20．(本小题满分 12 分)已知抛物线 C：$x^2=2py(p>0)$的焦点为 F，O 为坐标原点，横坐标为$\sqrt{2}$的点 P 在抛物线 C 上，且满足$|PF|=|PO|$.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)过抛物线 C 上的点 A(异于点 O)作抛物线 C 的切线 l，过点 O 作 l 的垂线，垂足为 B，直线 BO 与抛物线 C 交于点 D，当原点到直线 AD 的距离最小时，求点 A 的坐标.

【考点】本题考查抛物线的方程，直线与抛物线的位置关系，直线过定点问题

【答案】【思路导引】

【解】(1)依题意得 $P(\sqrt{2}，\frac{1}{p})$．又 $O(0，0)$，$F(0，\frac{p}{2})$，

由$|PF|=|PO|$，得$\sqrt{2+\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{2}\right)^2}=\sqrt{2+\left(\frac{1}{p}\right)^2}$，

解得 $p=2(p=-2$ 舍去)，

所以抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$.

(2)设 $A(2t，t^2)$，$t\neq0$，对 $y=\frac{1}{4}x^2$ 求导，得 $y'=\frac{1}{2}x$，

所以过点 A 的切线 l 的斜率 $k=\frac{1}{2}\times2t=t$，

所以切线 l 的方程为 $y-t^2=t(x-2t)$，即 $y=tx-t^2$.

因为直线 OB 与切线 l 垂直，所以直线 OB 的斜率 $k_{OB}=-\frac{1}{t}$，

直线 OB 的方程为 $y=-\frac{1}{t}x$，即 $x+ty=0$.

由$\begin{cases}x+ty=0,\\x^2=4y,\end{cases}$解得点 $D(-\frac{4}{t}，\frac{4}{t^2})$.

因为 $A(2t，t^2)$，$D(-\frac{4}{t}，\frac{4}{t^2})$，

所以直线 AD 的斜率 $k_{AD}=\frac{t^2-\frac{4}{t^2}}{2t+\frac{4}{t}}=\frac{t^2-2}{2t}$，

则直线 AD 的方程为 $y-t^2=\frac{t^2-2}{2t}(x-2t)$，

即$(t^2-2)x-2ty+4t=0$.

原点 O 到直线 AD 的距离 $d=\frac{|4t|}{\sqrt{(t^2-2)^2+(-2t)^2}}=\frac{4|t|}{\sqrt{t^4+4}}=\frac{4}{\sqrt{t^2+\frac{4}{t^2}}}\leq\frac{4}{\sqrt{2\sqrt{t^2\cdot\frac{4}{t^2}}}}=2$，当且仅当 $t^2=\frac{4}{t^2}$，即 $t=\pm\sqrt{2}$

时，等号成立，

所以原点 O 到直线 AD 的距离的最大值为 2，

此时点 A 的坐标为$(-2\sqrt{2},2)$或$(2\sqrt{2},2)$.

21.(本小题满分 12 分)已知函数 $f(x)=-2\ln x+2ax-ax^2(a\in R)$.

(1)若 $a=-\frac{1}{2}$，求函数 $f(x)$的极值；

(2)已知 $f'(x)$是 $f(x)$的导函数，$f'(x_1)=f'(x_2)=0$，且 $x_1>x_2>0$，若$\frac{f(x_1)f(x_2)}{2}+x_1x_2>\lambda$恒成立，求实数$\lambda$的取值范围.

【考点】利用导数研究函数的单调性和极值、利用导数研究不等式恒成立问题

【答案】(1)当 $a=-\frac{1}{2}$时，$f(x)=-2\ln x-x+\frac{1}{2}x^2$，定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=-\frac{2}{x}-1+x=\frac{(x+1)(x-2)}{x}$.

令 $f'(x)>0$，解得 $x>2$；令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<2$.

∴$f(x)$在$(0,2)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增，

∴$f(x)$有极小值，且极小值为 $f(2)=-2\ln 2$，无极大值.

(2)由题意得，$f'(x)=-\frac{2}{x}+2a-2ax=-\frac{2}{x}(ax^2-ax+1)$，

(将 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$ 转化为方程 $ax^2-ax+1=0$ 有两个不等正实根 x_1，x_2，从而得到根与系数的关系以及 a 的范围)

故 x_1，x_2 是方程 $ax^2-ax+1=0$ 的两个不等正实根，

则$\begin{cases}\Delta=a^2-4a>0,\\x_1+x_2=1,\\x_1x_2=\frac{1}{a}>0,\end{cases}$ 解得 $a>4$.

故$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+x_1x_2=\frac{1}{2}[-2\ln(x_1x_2)+2a(x_1+x_2)-ax_1^2-ax_2^2]+x_1x_2$

$=-\ln(x_1x_2)+a(x_1+x_2)-\frac{1}{2}a[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+x_1x_2$

$=-\ln\frac{1}{a}+a-\frac{a}{2}\left(1-\frac{2}{a}\right)+\frac{1}{a}=\ln a+\frac{1}{2}a+\frac{1}{a}+1$.

(用 x_1+x_2，x_1x_2 表示$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+x_1x_2$，从而转化为关于 a 的函数)

令 $h(a)=\ln a+\frac{1}{2}a+\frac{1}{a}+1(a>4)$，

则 $h'(a)=\frac{1}{a}+\frac{1}{2}-\frac{1}{a^2}=\frac{(a+1)^2-3}{2a^2}>0$ 在$(4,+\infty)$上恒成立，

∴函数 $h(a)$在$(4,+\infty)$上单调递增，则 $h(a)>\frac{13}{4}+2\ln 2$，

∴$\lambda\le\frac{13}{4}+2\ln 2$，即实数$\lambda$的取值范围为$\left(-\infty,\frac{13}{4}+2\ln 2\right]$.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22，23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. (本小题满分 10 分) 选修 4－4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，已知曲线 C_1 的参数方程是$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\alpha,\\y=\sqrt{6}\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$为参数)．以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程是$\rho=\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}$.

(1)求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

(2)设曲线 C_1 和 C_2 的交点为 A，B，求△AOB 的面积.

【考点】参数方程与普通方程、极坐标方程与直角坐标方程的互化

【答案】(1)将曲线 C_1 的参数方程$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\alpha,\\y=\sqrt{6}\sin\alpha\end{cases}$ (α为参数)转化为普通方程，得$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$.

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$代入$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$，

整理得曲线 C_1 的极坐标方程是$\rho^2=\frac{6}{2\cos^2\theta+1}$.

由曲线 C_2 的极坐标方程是$\rho=\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}$，可得$\rho\sin^2\theta=3\cos\theta$，

即$\rho^2\sin^2\theta=3\rho\cos\theta$，

结合极坐标与直角坐标的互化公式，可得曲线 C_2 的直角坐标方程是 $y^2=3x$.

(2)曲线 C_1 的普通方程为$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$，曲线 C_2 的直角坐标方程是 $y^2=3x$，

由$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1,\\y^2=3x(x\ge 0),\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\y=\sqrt{3}\end{cases}$或$\begin{cases}x=1,\\y=-\sqrt{3},\end{cases}$所以$|AB|=2\sqrt{3}$，

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|\times 1=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 1=\sqrt{3}$.

23．(本小题满分 10 分)选修 4－5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x+1|$.

(1)求不等式 $f(x)<|3x-2|-5$ 的解集 A；

(2)在(1)的条件下，证明：对于任意的 a，$b\in A$，都有 $f(ab)>f(a)-f(-b)$成立.

【考点】本题考查绝对值不等式

【答案】(1)【解】依题意，不等式 $f(x)<|3x-2|-5$，即 $|x+1|-|3x-2|+5<0$.

当 $x<-1$ 时，不等式可化为 $-(x+1)+(3x-2)+5<0$，

解得 $x<-1$，则 $x<-1$；

当 $-1\le x\le\frac{2}{3}$时，不等式可化为 $(x+1)+(3x-2)+5<0$，

解得 $x<-1$，此时原不等式无解；

当 $x>\frac{2}{3}$时，原式 $=(x+1)-(3x-2)+5<0$，解得 $x>4$，则 $x>4$.

综上，$x<-1$ 或 $x>4$.

所以不等式 $f(x)<|3x-2|-5$ 的解集 $A=\{x|x<-1$ 或 $x>4\}$.

(2)【证明】$f(a)-f(-b)=|a+1|-|-b+1|\le|a+b|$，当且仅当 $(a+b)(1-b)\ge0$ 时等号成立，

$[f(ab)]^2-(a+b)^2=(ab+1)^2-(a+b)^2=a^2b^2+1-a^2-b^2=(a^2-1)(b^2-1)$.

因为 a，$b\in A$，所以 $a^2>1$ 且 $b^2>1$，即 $(a^2-1)(b^2-1)>0$，

因此 $[f(ab)]^2-(a+b)^2>0$，又 $f(ab)=|ab+1|>0$，

所以 $f(ab)>|a+b|\ge f(a)-f(-b)$，

所以对于任意的 a，$b\in A$，

都有 $f(ab)>f(a)-f(-b)$ 成立.