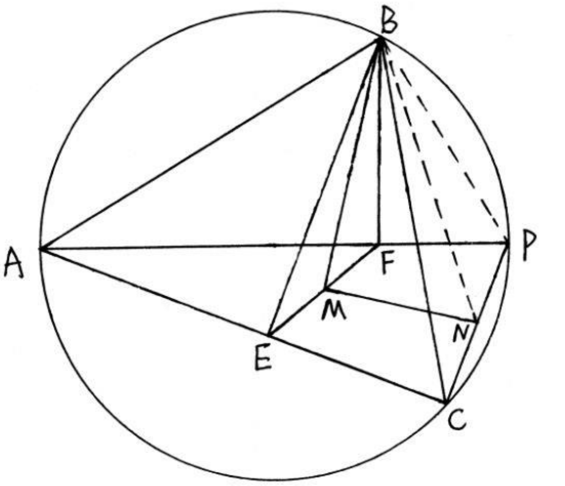
2020年摩尔多瓦国家队选拔考试

第三天

9. $\triangle ABC$内接于以AP为直径的圆Ω. 过B作AC、AP的垂线,垂足分别为E、F. EF的中点为M, CP的中点为N. 求证: $BM\perp MN$.



证明: $\because \angle AEB=\angle AFB=90^\circ$

$\therefore A,B,F,E$四点共圆.

于是$\angle BEF=\angle BAF=\angle BCP$,

$\angle BFE=180^\circ-\angle BAE=\angle BPC$.

因此$\triangle BEF\backsim\triangle BCP$. (*)

又因M、N分别是EF、CP的中点,所以M、N是(*)中相似下的一对对应点.

故$\triangle BEM\backsim\triangle BCN$.

从而$\dfrac{BM}{BN}=\dfrac{BE}{BC}$, $\angle EBM=\angle CBN \Rightarrow \angle EBC=\angle MBN$.

因此$\triangle BMN\backsim\triangle BEC$, 即$\angle BMN=\angle BEC=90^\circ$.

10. 设n为给定的正整数. 正实数a,b,c满足$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

求$E(a,b,c)=\frac{a^n}{a^{2n+1}+b^{2n}c+bc^{2n}}+\frac{b^n}{b^{2n+1}+c^{2n}a+ca^{2n}}+\frac{c^n}{c^{2n+1}+a^{2n}b+ab^{2n}}$的最大值.

解: 由柯西不等式可得 $(a^{2n+1}+b^{2n}c+bc^{2n})(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b})$

$$\geqslant (a^n+b^n+c^n)^2$$

即 $a^{2n+1}+b^{2n}c+bc^{2n}\geqslant (a^n+b^n+c^n)^2$

同理可得 $b^{2n+1}+c^{2n}a+ca^{2n}\geqslant (a^n+b^n+c^n)^2$;

$$c^{2n+1}+a^{2n}b+ab^{2n}\geqslant (a^n+b^n+c^n)^2.$$

因此 $E(a,b,c)\leqslant \frac{1}{a^n+b^n+c^n}$　　(1)

$\because 1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$, $\therefore abc\geqslant 27$.

从而 $a^n+b^n+c^n\geqslant 3\sqrt[3]{(abc)^n}\geqslant 3^{n+1}$.

再结合(1)式可得. $E(a,b,c)\leqslant \frac{1}{3^{n+1}}$.

而$E(3,3,3)=\frac{1}{3^{n+1}}$, 故$E(a,b,c)$的最大值是$\frac{1}{3^{n+1}}$.

11. 求所有函数$f:[-1,1]\to R$, 使得$f(\sin x)+f(\cos x)=2020$对所有实数x恒成立.

解: 设$\sin x=t$, 则$\cos x=\sqrt{1-t^2}$或$-\sqrt{1-t^2}$.

结合题中的条件可知$f(t)+f(\sqrt{1-t^2})=2020$, $\forall t\in[-1,1]$.　(1)

$f(t)+f(-\sqrt{1-t^2})=2020$, $\forall t\in[-1,1]$.　(2)

由(1),(2)可知 $f(\sqrt{1-t^2})=f(-\sqrt{1-t^2})$, $\forall t\in[-1,1]$.

即$f(x)=f(-x)$, $\forall x\in[-1,1]$. 故$f(x)$是偶函数.

令函数$g:[-1,1]\to R$, $g(1-2x^2)=f(x)-1010$, $x\in[-1,1]$.

则由$f(x)+f(\sqrt{1-x^2})=2020$, $\forall x\in[-1,1]$可得:

$g(1-2x^2)+g(2x^2-1)=0$. 即$g(x)$是奇函数.

从而$f(x)=1010+g(1-2x^2)$, 其中$g:[-1,1]\to R$, $g(x)$是任意一个奇函数.

经检验, 上述所得的$f(x)$符合题意.

12. 在一个象棋单循环赛中，每个选手与其他选手各比赛一局。已知所有的选手得分都不相同。所有选手中的最后一名得了k分。那么，第一名至少得了多少分？（对每一局棋，胜者得1分，败者得0分，平局则双方各得0.5分）

解：设一共有n名选手，第一名得了a分。

考虑这n名选手的总得分（设为x）。由于每一局双方共产生一分，故$x=C_n^2$。因为所有的选手得分都不相同，所以

$$x \geqslant k+\left(k+\frac{1}{2}\right)+(k+1)+\cdots+\left(k+\frac{n-1}{2}\right)=nk+\frac{n(n-1)}{4}$$，即$n \geqslant 4k+1$。

且$x \leqslant a+\left(a-\frac{1}{2}\right)+(a-1)+\cdots+\left(a-\frac{n-1}{2}\right)=na-\frac{n(n-1)}{4}$，即$a \geqslant \frac{3}{4}(n-1)$。

因此$a \geqslant \frac{3}{4}(n-1) \geqslant \frac{3}{4}\cdot 4k=3k$。

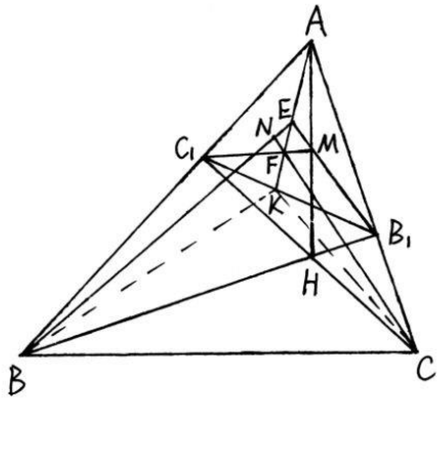
下面给出一种符合题意，且第一名得了$3k$分的构造：

有$4k+1$个选手$A_1, A_2, \cdots, A_{4k+1}$。让$A_i$战胜$A_j$，当且仅当$1 \leqslant i<j \leqslant 4k+1$，$j \geqslant i+(2k+1)$。其它对局为平局。

则选手A_i得了$3k-\frac{i-1}{2}$分（$i=1,2,\cdots,4k+1$）。

故第一名至少得了$3k$分。

4. 在锐角$\triangle ABC$中，H为垂心，BB_1、CC_1为高线。M为AH的中点，在线段B_1C_1上取不在AH上的一点K，直线AK与MB_1和MC_1分别交于点E和F，BE交CF于点N。求证：K为$\triangle NBC$的垂心。



引理：若$x, y, \alpha, \beta>0$，$x+y=\alpha+\beta<\pi$，且$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$，则$x=\alpha$，$y=\beta$。

引理的证明：设$x+y=\alpha+\beta=\theta$

则$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{\sin(\theta-y)}{\sin y}=\sin\theta\cot y-\cos\theta$，

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin(\theta-\beta)}{\sin\beta}=\sin\theta\cot\beta-\cos\theta$。

因$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$，$0<\theta<\pi$。

故$y=\beta$，$x=\alpha$。

回到本题，连结BK，CK.

∵ $HC_1\perp AB$，$HB_1\perp AC$. ∴ A，C_1，H，B_1四点共圆，且圆心为M.

$$\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle HBE}=\frac{\frac{\sin\angle BAE}{BE}\cdot AE}{\frac{\sin\angle BB_1E}{BE}\cdot B_1E}=\frac{\sin\angle BAE}{\sin\angle BB_1E}\cdot\frac{AE}{B_1E}=\frac{\sin\angle BAE}{\sin\angle HB_1M}\cdot\frac{\sin\angle AB_1E}{\sin\angle B_1AE},$$

$$\frac{\sin\angle C_1CK}{\sin\angle ACK}=\frac{\frac{\sin\angle CC_1K}{CK}\cdot C_1K}{\frac{\sin\angle CAK}{CK}\cdot AK}=\frac{\sin\angle CC_1K}{\sin\angle CAK}\cdot\frac{C_1K}{AK}=\frac{\sin\angle CC_1K}{\sin\angle CAK}\cdot\frac{\sin\angle C_1AK}{\sin\angle AC_1K}$$

∵ $\angle BAE=\angle C_1AK$，$\angle B_1AE=\angle CAK$，$\angle AB_1E=\angle HAB_1=\angle CC_1K$，$\angle HB_1M=\angle AHB_1=\angle AC_1K$.

$$\therefore\ \frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle HBE}=\frac{\sin\angle C_1CK}{\sin\angle ACK}.$$

又因$\angle ABE+\angle HBE=\angle ABH=\angle ACH=\angle C_1CK+\angle ACK$，结合引理可知$\angle ABE=\angle C_1CK$.

于是
$$\begin{aligned}\angle KCB+\angle NBC&=\angle C_1CK+\angle BCC_1+\angle NBC\\&=\angle BCC_1+(\angle ABE+\angle NBC)\\&=\angle BCC_1+\angle C_1BC=90^\circ\end{aligned}$$

即$CK\perp B\cancel{E}N$. 同理可证$BK\perp C\cancel{E}N$.

故K是$\triangle NBC$的垂心.