高 三 练 习 卷

数学参考答案及评分建议

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x\mid \ln x<0\}$，$B=\{x\mid 2^x<\sqrt{2}\}$，则 $A\cap B=$

A. $(-\infty,1)$　　B. $(0,1)$　　C. $(-\infty,\frac{1}{2})$　　D. $(0,\frac{1}{2})$

【答案】D

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, x>0,\\ -\sin x, x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(f(-\frac{\pi}{6}))=$

A. $\sqrt{2}$　　B. 1　　C. -1　　D. 2

【答案】C

3. 若 $\frac{z-3}{z+\mathrm{i}}=\mathrm{i}$，复数 z 与 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点分别为 A，B，则 $|AB|=$

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 3　　D. 4

【答案】A

4. 现有茶壶九只，容积从小到大成等差数列，最小的三只茶壶容积之和为0.5 升，最大的三只茶壶容积之和为2.5 升，则从小到大第 5 只茶壶的容积为

A. 0.25 升　　B. 0.5 升　　C. 1 升　　D. 1.5 升

【答案】B

5. 古希腊人从一对对顶圆锥的截痕中发现了圆锥曲线，并研究了它的一些几何性质．比如，双曲线有如下性质：A、B 分别为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右顶点，从 C 上一点 P（异于 A，B）向实轴引垂线，垂足为 Q，则 $\frac{|PQ|^2}{|AQ|\cdot|QB|}$ 为常数．若 C 的离心率为 2，则该常数为

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 3

【答案】D

6. 在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=2$，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}=9$，

则 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}=$

A. -1　　B. 1　　C. $\frac{15}{8}$　　D. 3

【答案】B

7. 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AA_1=3$，M 是 A_1D_1 的中点，点 N 在棱 CC_1 上，

$CN=2NC_1$，则平面 AMN 与侧面 BB_1C_1C 的交线长为

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{13}}{2}$　　C. $\frac{2\sqrt{10}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{13}}{3}$

【答案】C

8. 已知 $f(x)=\left|\ln(\sqrt{x^2+1}-x)\right|$，若 $a=f(\ln\frac{2}{3})$，$b=f(\frac{1}{3})$，$c=f(\tan\frac{1}{2})$，则

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $c<a<b$　　D. $b<c<a$

【答案】B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 某学校高三年级有男生 640 人，女生 360 人. 为获取该校高三学生的身高信息，采用抽样调查的方法统计样本的指标值（单位：cm），并计算得到男生样本的平均值 175，方差为 36，女生样本的平均值为 165，方差为 36，则下列说法正确的是

A．若男、女样本量分别为 64，36，则总样本的平均值为 171.4

B．若男、女样本量分别为 64，36，则总样本的方差为 36

C．若男、女的样本量都是 50，则总样本的平均值为 170

D．若男、女的样本量都是 50，则总样本的方差为 61

【答案】ACD

10. 已知 O 为坐标原点，过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 $F(2,0)$ 作斜率为 $\sqrt{3}$ 的弦 AB，其中点 A 在第一象限，则

A． $\angle AOF=\angle BOF$

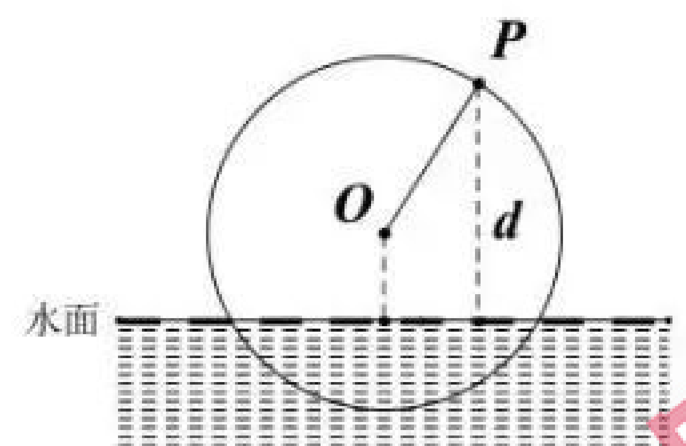
B． $\angle AOB>90^\circ$

C． $|AB|=\frac{16}{3}$

D． $|AF|=3|FB|$

【答案】BD

11. 明朝科学家徐光启在《农政全书》中用图画描绘了筒车的工作原理．如图，一个半径为 4 m 的筒车按逆时针方向每分钟转 2 圈，筒车的轴心 O 距离水面的高度为 2 m．设筒车上的某个盛水桶 P 到水面的距离为 d（单位：m）（在水面下记 d 为负数），若从盛水筒 P 刚浮出水面时开始计算时间，则



A．当筒车转动 5 秒时，盛水桶距离水面 4 m

B．盛水桶出水后至少经过 10 秒就可到达最高点

C．盛水桶第二次距离水面 4m 时用时 15 秒

D．盛水桶入水后至少需要 20 秒才可浮出水面

【答案】ABC

12. 在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，将菱形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折成空间四边形 $A'BCD$，使得 $\angle A'BC=\frac{\pi}{2}$．设 E，F 分别为棱 BC，$A'D$ 的中点，则

A． $EF=\sqrt{3}$

B．直线 $A'C$ 与 EF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C．直线 $A'C$ 与 EF 的距离为 $\frac{1}{2}$

D．四面体 $A'BCD$ 的外接球的表面积为 4π

【答案】AC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\left(\frac{2}{x}-\sqrt{x}\right)^4(3x-2)$ 的展开式中含 x^3 项的系数为________.

【答案】3

14. 已知圆 $C_1:(x-a)^2+(y-1)^2=1$ 与圆 $C_2:x^2+y^2=3$ 交于 A，B 两点，若直线 AB 的倾斜角为 60°，则 $|AB|=$________.

【答案】$\sqrt{3}$

15. 已知$\sin\theta+\cos\theta=\sin\alpha$，$\sin\theta\cos\theta=-\sin 2\alpha$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则$\cos\alpha=$________.

【答案】$\frac{4\sqrt{17}}{17}$

16. 已知函数$f(x)$，$g(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$，$f(x)$是偶函数，$g(x-1)+1$是奇函数，且$g(x-2)=f(x)+4$，$f(4)=-3$，则$g(-1)=$________；$\sum\limits_{k=1}^{2023}g(k)=$________.

【答案】-1；-2021

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10分）

记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，点D在线段AC上，$BD=CD=2AD$.

（1）若$a=c=2$，求b；

（2）若$B=\frac{\pi}{3}$，求角A.

【解】（1）因为$BD=CD=2AD$，$AD+CD=b$，

所以$BD=CD=\frac{2}{3}b$，$AD=\frac{1}{3}b$.

在$\triangle ABD$中，由余弦定理，得

$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\angle ADB=\frac{5}{9}b^2-\frac{4}{9}b^2\cos\angle ADB$，①

在$\triangle BCD$中，由余弦定理，得

$BC^2=CD^2+BD^2-2CD\cdot BD\cos\angle BDC=\frac{8}{9}b^2-\frac{8}{9}b^2\cos\angle ADC$．② …… 2分

因为$\angle ADB+\angle BDC=\pi$，所以$\cos\angle ADB+\cos\angle BDC=0$，

由2×①+②，得$2AB^2+BC^2=2b^2$，即$a^2+2c^2=2b^2$.

又因为$a=c=2$，所以$b=\sqrt{6}$. …… 5分

（2）设$\angle CBD=\theta$，则$\angle ABD=\frac{\pi}{3}-\theta$，

因为$BD=CD$，所以$\angle ADB=2\theta$，所以$\angle BAD=\frac{2\pi}{3}-\theta$.

在$\triangle ABD$中，由正弦定理，得$\frac{AD}{\sin\angle ABD}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$，

即 $\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)}=\dfrac{2}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)}$，

所以 $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)$， …… 7 分

即 $\sin\dfrac{2\pi}{3}\cos\theta-\cos\dfrac{2\pi}{3}\sin\theta=2\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\theta-\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\theta\right)$，

即 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta=\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta$，所以 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

因为 $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，

所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}-\theta=\dfrac{\pi}{2}$． ……10 分

18.（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 3 的等差数列，数列 $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，且满足 $a_1+a_3=b_1+b_2+b_3$，$a_2+a_4=b_2+b_4$．将数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公共项按照由小到大的顺序排列，构成新数列 $\{c_n\}$．

（1）证明：$c_n=b_{2n}$；

（2）求数列 $\{a_nc_n\}$ 的前 n 项和 S_n．

【解】（1）由 $a_1+a_3=b_1+b_2+b_3$，得 $2a_1+6=7b_1$，

由 $a_2+a_4=b_2+b_4$，得 $2a_1+12=10b_1$，

解得，$a_1=4$，$b_1=2$．

因为数列 $\{a_n\}$ 的公差为 3，数列 $\{b_n\}$ 的公比为 2，

所以 $a_n=3n+1$，$b_n=2^n$． …… 2 分

$b_1=2$ 不是数列 $\{a_n\}$ 的项，$b_2=4$ 是数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项．

设 $b_k=2^k=3m+1$，则

$b_{k+1}=2^{k+1}=2\times2^k=2(3m+1)=3\times2m+2$，

所以 b_{k+1} 不是数列 $\{a_n\}$ 的项． …… 4 分

因为$b_{k+2}=2^{k+2}=4\times 2^k=4(3m+1)=3(2m+1)+1$，

所以b_{k+2}是数列$\{a_n\}$的项.

所以$c_n=b_{2n}$. …… 6分

（2）由（1）可知，$c_n=b_{2n}=4^n$，$a_nc_n=(3n+1)4^n$.

$S_n=4\times 4+7\times 4^2+10\times 4^3+\cdots+(3n+1)4^n$，

$4S_n=\quad 4\times 4^2+7\times 4^3+10\times 4^4+\cdots+(3n+1)4^{n+1}$， …… 8分

所以$-3S_n=16+3\left(4^2+4^3+4^4+\cdots+4^n\right)-(3n+1)4^{n+1}$

$=4+3\left(4+4^2+4^3+4^4+\cdots+4^n\right)-(3n+1)4^{n+1}$

$=4+3\times\dfrac{4(1-4^n)}{1-4}-(3n+1)4^{n+1}$

$=4^{n+1}-(3n+1)4^{n+1}=-3n4^{n+1}$，

所以$S_n=n4^{n+1}$. ……12分

19.（12分）

某微型电子集成系统可安装3个或5个元件，每个元件正常工作的概率均为$p(0<p<1)$，且各元件是否正常工作相互独立．若有超过一半的元件正常工作，则该系统能稳定工作．

（1）若该系统安装了3个元件，且$p=\dfrac{2}{3}$，求它稳定工作的概率；

（2）试比较安装了5个元件的系统与安装了3个元件的系统哪个更稳定．

【解】（1）设安装3个元件的系统稳定工作的概率为P，则

3个元件中至少2个元件正常工作．

又因为各元件是否正常工作相互独立，

所以$P=C_3^2p^2(1-p)+C_3^3p^3=3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{20}{27}$.

答：安装3个元件的系统稳定工作的概率为$\dfrac{20}{27}$. …… 4分

（2）由（1）知，安装3个元件的系统稳定工作的概率

$P=C_3^2p^2(1-p)+C_3^3p^3=-2p^3+3p^2$. …… 6分

设安装 5 个元件的系统稳定工作的概率为 P'，则

$P'=C_5^3p^3(1-p)^2+C_5^4p^4(1-p)+C_5^5p^5=6p^5-15p^4+10p^3$. …… 8 分

所以 $P'-P=6p^5-15p^4+10p^3-(-2p^3+3p^2)=3p^2(p-1)^2(2p-1)$. ……10 分

当 $p=\frac{1}{2}$ 时，$P'-P=0$，$P'=P$，两个系统工作的稳定性相同；

当 $0<p<\frac{1}{2}$ 时，$P'-P<0$，$P'<P$，3 个元件的系统比 5 个元件的系统更稳定；

当 $\frac{1}{2}<p<1$ 时，$P'-P>0$，$P'>P$，5 个元件的系统比 3 个元件的系统更稳定.

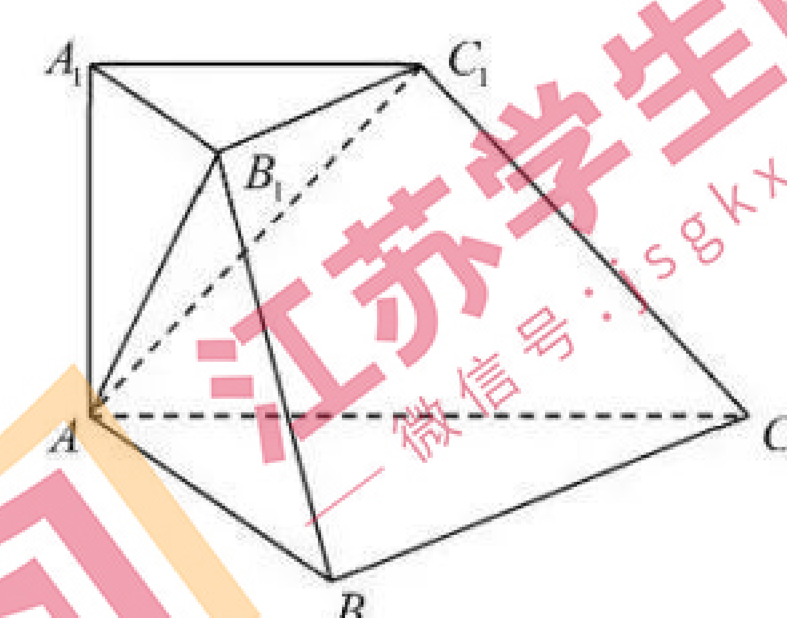
……12 分

20.（12 分）

如图，在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=2A_1C_1$，四棱锥 $A-BCC_1B_1$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求三棱锥 $A-A_1B_1C_1$ 的体积；

（2）若 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 ABC，平面 $A_1ABB_1\perp$ 平面 ABC，求二面角 $A-B_1C_1-B$ 的正弦值.



【解】（1）连结 BC_1.

因为三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1$，$AC=2A_1C_1$，

所以 $BC=2B_1C_1$，所以 $S_{\triangle BCC_1}=2S_{\triangle BB_1C_1}$，

所以 $V_{A-BCC_1}=2V_{A-BB_1C_1}$.

因为三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1$，$AC=2A_1C_1$，

所以 $S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle A_1B_1C_1}$，所以 $V_{C_1-ABC}=4V_{A-A_1B_1C_1}$.

又因为 $V_{C_1-ABC}=V_{A-BCC_1}$，

所以$V_{A-A_1B_1C_1}:V_{A-BB_1C_1}:V_{A-BCC_1}=1:2:4$. …… 2 分

又因为$V_{A-BCC_1B_1}=V_{A-BB_1C_1}+V_{A-BCC_1}$,

所以$V_{A-A_1B_1C_1}=\frac{1}{6}V_{A-BCC_1B_1}=\frac{1}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}$. …… 4 分

(2) 取 AB 中点 D,AC 中点 E,连结 CD、BE,交于点 F,

因为$\triangle ABC$是正三角形,E 是 AC 中点,所以 $BE\perp AC$.

又因为平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 ABC,

平面 $A_1ACC_1\cap$ 平面 $ABC=AC$,$BE\subset$ 平面 ABC,

所以 $BE\perp$ 平面 A_1ACC_1.

又因为 $A_1A\subset$ 平面 A_1ACC_1,所以 $BE\perp A_1A$.

同理,$CD\perp A_1A$.

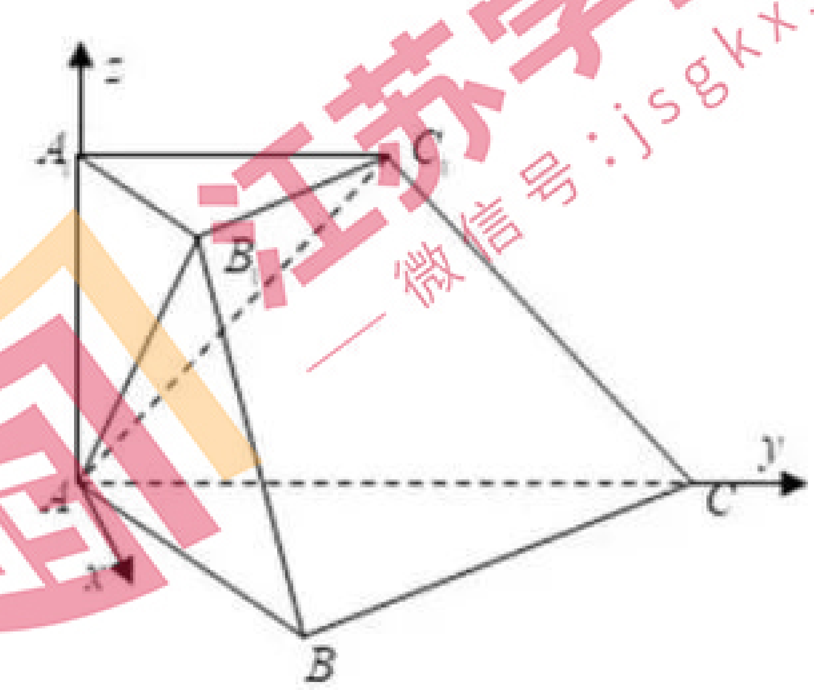
又因为 $CD\cap BE=F$,CD,$BE\subset$ 平面 ABC,

所以 $A_1A\perp$ 平面 ABC. …… 6 分

在平面 ABC 内,过点 A 作 $AH\perp AC$,

以 A 为原点,AH 为 x 轴,AC 为 y 轴,AA_1 为 z 轴,

建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.



因为 $AC=2A_1C_1$,$AC=2$,

所以 $A_1C_1=1$,$S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

由(1)可知$V_{A-A_1B_1C_1}=\frac{\sqrt{3}}{12}$,故$A_1A=1$.

所以$A(0,0,0)$, $B(\sqrt{3},1,0)$, $C(0,2,0)$,

$B_1(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1)$, $C_1(0,1,1)$,$\overrightarrow{AB_1}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1)$,

$\overrightarrow{AC_1}=(0,1,1)$,$\overrightarrow{CB}=(\sqrt{3},-1,0)$,$\overrightarrow{CC_1}=(0,-1,1)$. …… 8 分

设平面AB_1C_1的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

由$\begin{cases}\overrightarrow{AB_1}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+\frac{1}{2}y_1+z_1=0,\\ y_1+z_1=0,\end{cases}$不妨取$\boldsymbol{m}=(\frac{\sqrt{3}}{3},1,-1)$.

设平面BB_1C_1的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

由$\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}\sqrt{3}x_2-y_2=0,\\ -y_2+z_2=0,\end{cases}$不妨取$\boldsymbol{n}=(\frac{\sqrt{3}}{3},1,1)$. ……10 分

设二面角$A-B_1C_1-B$的平面角为θ，$\theta\in[0,\ \pi]$，

则$|\cos\theta|=\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\sqrt{\frac{7}{3}}}\right|=\frac{1}{7}$.

因为$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，且$\sin\theta\in[0,1]$，所以$\sin\theta=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

即二面角$A-B_1C_1-B$的正弦值为$\frac{4\sqrt{3}}{7}$. ……12 分

21.（12 分）

已知椭圆$C_1:\frac{x^2}{2}+y^2=1$的左、右顶点是双曲线$C_2:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的顶点，$C_1$的焦点到$C_2$的渐近线的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}$．直线$l:y=kx+t$与$C_2$相交于$A,B$两点，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-3$.

（1）求证：$8k^2+t^2=1$；

（2）若直线l与C_1相交于P,Q两点，求$|PQ|$的取值范围．

【解】（1）由题意得椭圆焦点坐标为$(1,0)$，双曲线渐近线方程为$bx\pm ay=0$，

所以$\begin{cases}a=\sqrt{2},\\ \frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\sqrt{2},\\ b=1,\end{cases}$

所以C_2的方程为$\frac{x^2}{2}-y^2=1$. …… 2 分

由$\begin{cases}y=kx+t,\\ x^2-2y^2=2,\end{cases}$消$y$，得$(1-2k^2)x^2-4ktx-2t^2-2=0$，

所以$\begin{cases}1-2k^2\neq0,\\ \Delta=16k^2t^2-4(1-2k^2)(-2t^2-2)>0,\end{cases}$得$t^2>2k^2-1\neq0$.

设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{4kt}{1-2k^2}, \\ x_1x_2=\dfrac{-2t^2-2}{1-2k^2}, \end{cases}$ …… 4 分

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+t)(kx_2+t)$

$$=(1+k^2)x_1x_2+kt(x_1+x_2)+t^2$$

$$=(1+k^2)\frac{-2t^2-2}{1-2k^2}+\frac{4k^2t^2}{1-2k^2}+t^2=-3,$$

化简得 $8k^2+t^2=1$，得证. …… 6 分

（2）由 $\begin{cases} y=kx+t, \\ x^2+2y^2=2, \end{cases}$ 消 x，得 $(1+2k^2)x^2+4ktx+2t^2-2=0$，

所以 $\Delta=16k^2t^2-4(1+2k^2)(2t^2-2)>0$，即 $t^2<2k^2+1$.

结合 $t^2>2k^2-1\neq0$， $8k^2+t^2=1$，及 $k\neq0$， $t^2\geqslant0$， 可得 $0<k^2\leqslant\frac{1}{8}$.

设 $P(x_3,y_3)$， $Q(x_4,y_4)$，则 $\begin{cases} x_3+x_4=\dfrac{-4kt}{1+2k^2}, \\ x_3x_4=\dfrac{2t^2-2}{1+2k^2}, \end{cases}$ …… 8 分

所以 $(x_3-x_4)^2=(\dfrac{-4kt}{1+2k^2})^2-4\dfrac{2t^2-2}{1+2k^2}=\dfrac{-8(t^2-2k^2-1)}{(1+2k^2)^2}=\dfrac{80k^2}{(1+2k^2)^2}$，

所以 $|PQ|^2=(1+k^2)(x_3-x_4)^2=\dfrac{80k^2(1+k^2)}{(1+2k^2)^2}$， $0<k^2\leqslant\frac{1}{8}$. ……10 分

设 $\lambda=1+2k^2$，则 $\lambda\in\left(1,\frac{5}{4}\right]$，所以 $\frac{1}{\lambda^2}\in\left[\frac{16}{25},1\right)$，

所以 $PQ^2=\dfrac{80\frac{\lambda-1}{2}\cdot\frac{\lambda+1}{2}}{\lambda^2}=20(1-\dfrac{1}{\lambda^2})\in\left(0,\dfrac{36}{5}\right]$，

所以 $|PQ|\in\left(0,\dfrac{6\sqrt5}{5}\right]$.　　　　……12 分

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=x^2-ax+a^2$，$g(x)=2e^{x-1}-ax$.

（1）若 $a=1$，证明：曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 有且仅有一条公切线；

（2）当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)-g(x)\leqslant 2ax$，求 a 的取值范围.

【解】（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=x^2-x+1$，$g(x)=2e^{x-1}-x$，

所以 $f'(x)=2x-1$，$g'(x)=2e^{x-1}-1$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,x_1^2-x_1+1)$ 处的切线方程为

$y-(x_1^2-x_1+1)=(2x_1-1)(x-x_1)$，即 $y=(2x_1-1)x-x_1^2+1$，

曲线 $y=g(x)$ 在点 $(x_2,2e^{x_2-1}-x_2)$ 处的切线方程为

$y-(2e^{x_2-1}-x_2)=(2e^{x_2-1}-1)(x-x_2)$，

即 $y=(2e^{x_2-1}-1)x-2e^{x_2-1}(x_2-1)$.　　　　…… 2 分

令 $\begin{cases}2x_1-1=2e^{x_2-1}-1,\\-x_1^2+1=-2e^{x_2-1}(x_2-1),\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=e^{x_2-1},\\-x_1^2+1=-2e^{x_2-1}(x_2-1),\end{cases}$

消去 x_2，整理得 $x_1^2-2x_1\ln x_1-1=0$，

所以 $x_1-2\ln x_1-\dfrac{1}{x_1}=0$.　　　　…… 4 分

设 $h(x)=x-2\ln x-\dfrac{1}{x}(x>0)$，则 $h'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $h(1)=0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一的零点 $x=1$，

所以方程 $x-2\ln x-\dfrac{1}{x}=0$ 有唯一的解 $x=1$，

所以曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 有且仅有一条公切线 $y=x$.　　　　…… 6 分

（2）因为对 $\forall x\geqslant1$，$f(x)-g(x)\leqslant2ax$ 恒成立，

所以 $2e^{x-1} \geqslant (x-a)^2$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上恒成立，

所以 $\dfrac{(x-a)^2}{e^{x-1}} \leqslant 2$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上恒成立，

令 $G(x) = \dfrac{(x-a)^2}{e^{x-1}} \ (x \geqslant 1)$，

$G'(x) = -\dfrac{(x-a)^2 - 2(x-a)}{e^{x-1}} = -\dfrac{(x-a)[x-(a+2)]}{e^{x-1}}$，

则当 $x < a$ 时 $G'(x) < 0$，$G(x)$ 单调递减，

当 $a < x < a+2$ 时，$G'(x) > 0$，$G(x)$ 单调递增，

当 $x > a+2$ 时，$G'(x) < 0$，$G(x)$ 单调递减，

所以在 $x = a$ 处 $G(x)$ 有极小值，在 $x = a+2$ 处 $G(x)$ 有极大值.　　　……8 分

①当 $a+2 \leqslant 1$，即 $a \leqslant -1$ 时，由 $G(x)_{\max} = G(1) = (1-a)^2 \leqslant 2$，

解得 $1-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 1+\sqrt{2}$，舍去.　　　……10 分

②当 $a+2 > 1$，即 $a > -1$ 时，则 $G(x)_{\max} = \max\{G(a+2), G(1)\}$，

所以，由 $\begin{cases} a > -1, \\ G(a+2) = \dfrac{4}{e^{a+1}} \leqslant 2, \\ G(1) = (1-a)^2 \leqslant 2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a > -1, \\ a \geqslant -1 + \ln 2, \\ 1-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 1+\sqrt{2}. \end{cases}$

因为 $8 > e^2$，所以 $2 > e^{\frac{2}{3}}$，所以 $\ln 2 > \dfrac{2}{3}$，

所以 $-1 + \ln 2 > -1 + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{3} > 1-\sqrt{2} > -1$，

所以 $-1 + \ln 2 \leqslant a \leqslant 1+\sqrt{2}$.

综上，a 的取值范围为 $-1 + \ln 2 \leqslant a \leqslant 1+\sqrt{2}$.　　　……12 分