

XKB

新高考模拟检测卷(三)

数 学

本试卷满分 150 分,考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

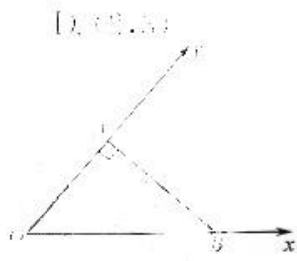
一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x < 2\}$, $B = \{x | 2 < x < 3\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $(1, 2)$ B. $(2, 3)$ C. $(2, 3)$ D. $(2, 3)$

2. 给定一个水平放置的图形的直观图是一个等腰直角三角形 ABC , 斜边长 $|AB| = 1$, 那么原平面图形的面积是

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$
C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$



3. $(x-2)^8$ 的二项展开式中,二项式系数的最大值为 a , 含 x^5 项的系数为 b , 则 $\frac{a}{b} =$

- A. $\frac{5}{32}$ B. $-\frac{5}{32}$ C. $\frac{32}{5}$ D. $-\frac{32}{5}$

4. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega x (\omega > 0)$ 的零点是以 $\frac{\pi}{2}$ 为公差的等差数列. 若 $f(x)$ 在区间 $[0, \alpha]$ 上单调递增, 则 α 的取值范围为

- A. $(0, \frac{5\pi}{12}]$ B. $(0, \frac{7\pi}{12}]$ C. $(0, \frac{5\pi}{24}]$ D. $(0, \frac{7\pi}{24}]$

5. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且 $f(x) = -f(x-2)$. 当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = 3^x - 1$, 则 $f(\log_3 54) =$

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 2

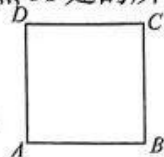
6. 四棱台 $ABCD-EFGH$ 中, 其上、下底面均为正方形, 若 $EF = 2AB = 8$, 且每条侧棱与底面所成角的正切值均为 $3\sqrt{2}$, 则该棱台的体积为

- A. 224 B. 448 C. $\frac{224}{3}$ D. 147

7. 某人设计一项单人游戏, 规则如下: 先将一棋子放在如图所示正方形 $ABCD$ (边

【模拟检测·数学(三) 第 1 页(共 4 页) F-XKB】

长为2个单位)的顶点A处,然后通过掷骰子来确定棋子沿正方形的边按逆时针方向行走的单位,如果掷出的点数为*i*(*i*=1,2,⋯,6),则棋子就按逆时针方向行走*i*个单位,一直循环下去.则某人抛掷三次骰子后棋子恰好又回到点A处的所有不同走法共有



- A. 22种
B. 24种
C. 25种
D. 27种
8. 设方程 $e^x + x + e = 0$ 和 $\ln x + x + e = 0$ 的根分别为 p 和 q , 函数 $f(x) = e^x + (p+q)x^e$, 则
- A. $f(\frac{4}{3}) < f(\frac{2}{3}) < f(0)$
B. $f(\frac{2}{3}) < f(0) < f(\frac{4}{3})$
C. $f(\frac{2}{3}) < f(\frac{4}{3}) < f(0)$
D. $f(0) < f(\frac{2}{3}) < f(\frac{4}{3})$

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. 已知 $z \in \mathbb{C}$, \bar{z} 是 z 的共轭复数, 则
- A. 若 $z = \frac{1+3i}{1-3i}$, 则 $\bar{z} = \frac{-4-3i}{5}$
B. 若 z 为纯虚数, 则 $z^2 < 0$
C. 若 $z - (2+i) > 0$, 则 $z > 2+i$
D. 若 $M = \{z \mid z = 3i^k - 3, k \in \mathbb{N}\}$, 则集合 M 所构成区域的面积为 6π
10. 已知圆 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, 直线 $l: x + my - 2m - 3 = 0$, 则
- A. 直线 l 过定点 $(-2, 3)$
B. 当 $m = \frac{12}{5}$ 时, 直线 l 与圆 C 相切
C. 当 $m = -1$ 时, 过直线 l 上一点 P 向圆 C 作切线, 切点为 Q , 则 PQ 的最小值为 $\frac{\sqrt{34}}{2}$
D. 若圆 C 上只有一个点到直线 l 的距离为 1, 则 $m = \frac{12}{5}$
11. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x + \frac{1}{2}$, 则
- A. $x = \frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴
B. 函数 $f(x)$ 在 $[\frac{5\pi}{6}, \pi]$ 上单调递增
C. $y = f(x) + f(x + \frac{\pi}{4})$ 的最小值为 $-\sqrt{2}$
D. $y = \sqrt{3}x - \frac{1}{2}$ 是 $y = f(x)$ 的一条切线
12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 的直线 l 与 C 交于 P, Q 两点, O 为坐标原点, 则下列结论中正确的是
- A. 若 $|\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}| = |\overrightarrow{PF_1} - \overrightarrow{PF_2}|$, 且 $\overrightarrow{PF_2} = 2\overrightarrow{F_2Q}$, 则椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$
B. 若 $|OP| = \frac{1}{2}|F_1F_2|$, 且 $\frac{|PF_1|}{|PQ|} = \frac{8}{15}$, 则 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$
C. 若对任意的直线 l 总有 $|PQ| \geq |F_1F_2|$, 则椭圆 C 的离心率的取值范围为 $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1)$
D. 若存在直线 l , 使得 $|PF_1|, |PF_2|$ 的等比中项为 $|F_1F_2|$, 则椭圆 C 的离心率的取值范围为 $[\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{1}{2}]$

选择题答题栏

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知幂函数 $f(x)=x^a$ 的图象过点 $(8,4)$, 则 $f(x)=x^a$ 的值域是_____.
14. 已知抛物线 $C:y^2=4x$, 直线 $l:x=my+t$ 与抛物线 C 交于 M, N 两点, O 为坐标原点, 记直线 OM, ON 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $k_1 k_2 = -2$, 则 $t =$ _____.
15. 已知平面向量 a, b 满足 $|a-b|=1$ 且 $a \perp b$, 当向量 $a-b$ 与向量 $3a-b$ 的夹角最大时, 向量 b 的模为_____.
16. 已知正四面体 $A-BCD$ 内接于半径为 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ 的球 O 中, 在平面 BCD 内有一动点 P , 且满足 $AP=4\sqrt{2}$, 则 $|BP|$ 的最小值是_____; 直线 AP 与直线 BC 所成角的取值范围为_____.

四、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17. (10 分)

已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $8S_n = (a_n + 2)(n \in \mathbb{N}^+)$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列;

(2) 已知 $a_1 = \log_2 b$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (13 分)

在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a \sin(C + \frac{\pi}{3}) = b \sin \frac{\pi}{4}$.

(1) 求 $\tan \frac{A}{4}$;

(2) 求 $\frac{\cos B - \cos C}{\sin B + \sin C}$ 的取值范围.

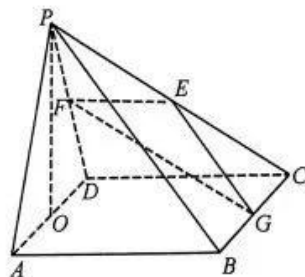
19. (12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, $\triangle PAD$ 是等边三角形, $CD \perp$ 平面 PAD , E, F, G, O 分别是 PC, PD, BC, AD 的中点.

(1) 求证: $PO \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求平面 EFG 与平面 $ABCD$ 的夹角的大小;

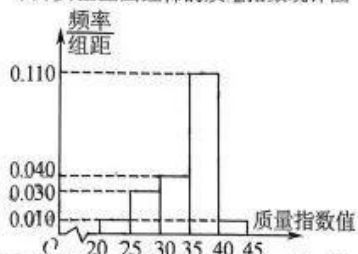
(3) 线段 PA 上是否存在点 M , 使得直线 GM 与平面 EFG 所成角为 $\frac{\pi}{6}$, 若存在, 求线段 PM 的长; 若不存在, 说明理由.



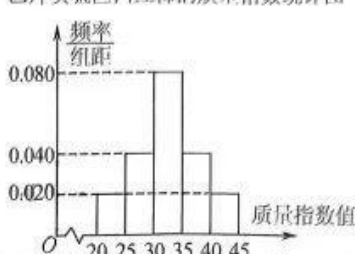
20. (12分)

随着人们生活水平的提高,国家倡导绿色安全消费,菜篮子工程从数量保障型转向质量效益型.为了测试甲、乙两种不同有机肥料的使用效果,某科研单位用西红柿做了对比实验,分别在两片实验区各摘取 100 个,对其质量的某项指标值进行检测,质量指数值达到 35 及以上的为“质量优等”,由测量结果绘成如下频率分布直方图,其中质量指数值分组区间是: $[20, 25)$, $[25, 30)$, $[30, 35)$, $[35, 40)$, $[40, 45]$.

甲片实验区西红柿的质量指数统计图



乙片实验区西红柿的质量指数统计图



- 分别求甲片实验区西红柿的质量指数的平均数和中位数(除不尽的保留两位小数);
- 请根据题中信息完成下面的列联表,并判断是否有 99.9% 的把握认为“质量优等”与使用不同的肥料有关.

	甲有机肥料	乙有机肥料	合计
质量优等			
质量非优等			
合计			

$$n = a + b$$

$$k = \frac{n(ad - bc)}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}$$

P	k	0.50	1.64	2.58	3.29	3.84	4.75	5.02
k	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828			

21. (12分)

设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 且焦距为 6, 点

$(2\sqrt{2}, 1)$ 在双曲线 C 上.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 已知 M 是直线 $x = \frac{a^2}{3}$ 上一点, 直线 MF_2 交双曲线 C 于 A (A 在第一象限), B 两点, O 为坐标原点, 过点 M 作直线 OA 的平行线 l , l 与直线 OB 交于点 P , 与 x 轴交于点 Q , 证明: P 为线段 MQ 的中点.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = ae^x - \sin x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 且 $f(x)$ 存在极值 ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 若存在 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$, 使得 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明: $x_1 + x_2 < 2\ln \frac{1}{a}$.

参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	D	D	C	B	ACD	CD	AB	ABD

11. (每空2分, 共6分) b ; F ; DE

12. (每空2分, 共8分) $\square\square\square\square\square$; $\frac{m(h_2-h_1)^2}{8}$; 图像各数据点近似为一条直线且斜率近似为2倍自由落体加速度(只要说法合理正确均给分); C

13. (10分) 解: (1) 静止时, 小球受力平衡, 设绳子对小球的拉力为 T , 圆锥体对小球的的支持力为 N , 由平衡条件得 $T = mg\cos 37^\circ$, $N = mg\sin 37^\circ$ (2分)

解得 $T = 48\text{ N}$, $N = 36\text{ N}$ (2分)

(2) 当小球与圆锥体之间的作用力为零时有 $N = 0$

由牛顿第二定律有 $mg\tan 37^\circ = m\omega^2 l \sin 37^\circ$ (2分)

解得 $\omega = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ rad/s}$ (1分)

所以, 小球受力则有 $T\cos 37^\circ = mg$ (2分)

解得 $T = 75\text{ N}$ (1分)

14. (12分) 解: (1) 由于连接 A、C 的细线刚好伸直, 因此连接 A、C 的细线上张力为零, 设 A、B、C 整体的加速度为 a_1 , 对小球 C 研究有 $mg\tan 30^\circ = ma_1$ (2分)

解得 $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}g$ (1分)

对 A、B、C 整体研究,

根据牛顿第二定律 $F = 3ma_1 = \sqrt{3}mg$ (2分)

(2) 若将水平拉力增大为原来的 $\sqrt{3}$ 倍, 设稳定时整体加速度大小为 a_2 , 根据牛顿第二定律 $3mg = 3ma_2$ (2分)

解得 $a_2 = g$ (1分)

设连接 B、C 的细线上张力为 F' ,

对小球 C 研究有 $\sqrt{F'^2 - (mg)^2} = ma_2$ (2分)

解得 $F' = \sqrt{2}mg$ (2分)

15. (1) $mg + \frac{2mv}{\Delta t}$; (2) 正确, $(\frac{k-3}{k+1})^2 h$;

(16分) 解: (1) 小球 1 做自由落体运动,

根据 $v^2 = 2gh$ (1分)

可得落地瞬间速度大小为 $v = \sqrt{2gh}$

由于是弹性碰撞, 所以反弹速度大小为 $v = \sqrt{2gh}$ 。设向下为正方向, 落地到反弹, 根据动量定理可得

$$(mg - F)\Delta t = -mv - mv \quad (2分)$$

解得 $F = mg + \frac{2mv}{\Delta t}$ (1分)

(2) 小球 1 以碰前刚刚着地的速率反弹并与小球 2 碰撞, 设向下为正方向, 设碰后小球 2 速度为 v_1 , 小球 1 碰后速度为 v_2 ,

根据动量守恒定律可得 $km_1v - m_1v = km_1v_1 + m_1v_2$ (1分)

根据机械能守恒定律可得 $\frac{1}{2}km_1v^2 + \frac{1}{2}m_1v^2 = \frac{1}{2}km_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_1v_2^2$ (1分)

联立解得

$$v_1 = \frac{k-3}{k+1}\sqrt{2gh}; \quad v_2 = \frac{3k-1}{k+1}\sqrt{2gh}$$

对于小球 2 碰后

根据动能定理可得 $-km_1gh' = 0 - \frac{1}{2}km_1v_1^2$ (2分)

解得 $h' = (\frac{k-3}{k+1})^2 h = (1 - \frac{4}{k+1})^2 h$ (2分)

因为 $k < 1$, 可得 $k+1 < 2$ (2分)

则 $\frac{4}{k+1} > 2; \quad (1 - \frac{4}{k+1})^2 > 1$

故 $h' > h$ (2分)

并且 k 越小, h' 越大, 所以他们的猜想是正确的;

2 球能达到的最大高度为 $h' = (\frac{k-3}{k+1})^2 h$ (2分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

