

## 2023 年新高考数学 I 卷试题参考答案

### 一、单选题

1、C    2、A    3、D    4、D

5、A    6、B    7、C    8、B

### 二、多选题

9、BD    10、ACD    11、ABC    12、ABD

### 三、填空题

13、64    14、 $\frac{7\sqrt{6}}{6}$     15、 $2 \leq \omega < 3$     16、 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

### 四、解答题

17. (10分)

已知在  $\triangle ABC$  中,  $A+B=3C$ ,  $2\sin(A-C)=\sin B$ .

(1) 求  $\sin A$ ;

(2) 设  $AB=5$ , 求  $AB$  边上的高.

解析

(1). 由题意得

$$A+B=3C \Rightarrow A+B+C=4C=\pi \Rightarrow C=\frac{\pi}{4}$$

所以

$$2\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3}{4}\pi-A\right) \Rightarrow \sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

(2). 因为  $\sin B=\sin(A+C)=\frac{2}{\sqrt{5}}$ , 所以由正弦定理可知

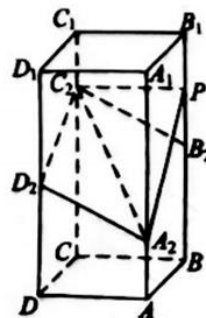
$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \Rightarrow b=2\sqrt{10}$$

所以由面积法可知

$$S=\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A=\frac{1}{2} \cdot c \cdot h \Rightarrow h=b \sin A=6$$

18. (12分)

如图, 在正四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB=2$ ,  $AA_1=4$ . 点  $A_2, B_2, C_2, D_2$  分别在棱  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  上,  $AA_2=1$ ,  $BB_2=DD_2=2$ ,  $CC_2=3$ .



(1) 证明:  $B_2C_2 \parallel A_2D_2$ ;

(2) 点  $P$  在棱  $BB_1$  上, 当二面角  $P-A_2C_2-D_2$  为  $150^\circ$  时, 求  $B_2P$ .

解析

以  $C$  为原点,  $CD$  为  $x$  轴,  $CB$  为  $y$  轴,  $CC_1$  为  $z$  轴建立空间直角坐标系, 所以

$B_2 : (0, 2, 2)$ ,  $C_2 : (0, 0, 3)$ ,  $A_2 : (2, 2, 1)$ ,  $D_2 : (2, 0, 2)$

(1). 因为  $\overrightarrow{B_2C_2} = (0, -2, 1)$ ,  $\overrightarrow{A_2D_2} = (0, -2, 1)$

所以  $\overrightarrow{B_2C_2} = \overrightarrow{A_2D_2}$ , 所以  $B_2C_2 \parallel A_2D_2$ .

(2). 设  $P : (0, 2, t)$ , 其中  $2 \leq t \leq 4$

所以  $\overrightarrow{PA_2} = (2, 0, 1-t)$ ,  $\overrightarrow{PC_2} = (0, -2, 3-t)$ ,  $\overrightarrow{D_2C_2} = (-2, 0, 1)$ ,  $\overrightarrow{D_2A_2} = (0, 2, -1)$ .

所以面  $PA_2C_2$  法向量  $\vec{n}_1 = (t-1, 3-t, 2)$ , 面  $D_2A_2C_2$  法向量  $\vec{n}_2 = (1, 1, 2)$

因为二面角  $P-A_2C_2-D_2$  为  $150^\circ$ , 所以

$$\left| \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2t^2 - 8t + 14}} \right| = |\cos 150^\circ| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t = 1(\text{舍}) \parallel t = 3$$

所以  $B_2P = 1$



19. (12分)

已知函数  $f(x) = a(e^x + a) - x$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 证明: 当  $a > 0$  时,  $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$ .

解析

(1). 对  $f(x)$  求导得  $f'(x) = a \cdot e^x - 1$ , 故

①  $a \leq 0$  时,  $f'(x) \leq -1 < 0$ , 函数  $f(x)$  单调递减

②  $a > 0$  时, 令  $f'(x) = 0$  得  $x_0 = -\ln a$ , 故

	$(-\infty, -\ln a)$	$-\ln a$	$(-\ln a, \infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

(2).  $f_{\min} = f(-\ln a) = a^2 + 1 + \ln a$

令  $g(a) = a^2 - \ln a - \frac{1}{2}$ , 求导得  $g'(a) = 2a - \frac{1}{a}$

令导数为 0 解得  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 所以

	$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$g'(a)$	-	0	+
$g(a)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以  $g_{\min} = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\ln 2}{2} > 0$

故  $g(a) > 0$ , 所以  $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$



20. 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 且  $d > 1$ , 令  $b_n = \frac{n^2+n}{a_n}$ , 记  $S_n, T_n$  分别为数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的前  $n$  项和.

(1) 若  $3a_2 = 3a_1 + a_3, S_3 + T_3 = 21$ , 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 若  $\{b_n\}$  为等差数列, 且  $S_{99} - T_{99} = 99$ , 求  $d$ .

(1). 由题意得  $3a_2 = 3a_1 + a_3, 2a_2 = a_1 + a_3$ , 解得

$$a_2 = 2a_1$$

又因为  $\{a_n\}$  为等差数列, 所以  $a_n = a_1 \cdot n$ , 所以  $b_n = \frac{n+1}{a_1}$

因为  $S_3 + T_3 = 21$ , 所以

$$6a_1 + \frac{9}{a_1} = 21 \Rightarrow a_1 = 3 \parallel a_1 = \frac{1}{2} (\text{舍})$$

所以  $a_n = 3n$

(2). 设  $a_n = d_a \cdot n + p_a, b_n = d_b \cdot n + p_b$ , 其中  $d_a > 1$

记  $c_n = a_n - b_n = (d_a - d_b)n + p_a - p_b$ , 故  $\{c_n\}$  也为等差数列, 所以

$$S_{99} - T_{99} = c_1 + c_2 + \cdots + c_{99} = \frac{(c_1 + c_{99}) \cdot 99}{2} = 99 \cdot c_{50} = 99$$

所以  $c_{50} = 1$

因为  $b_n = \frac{n^2+n}{a_n}$ , 所以代入可得

$$d_b n + p_b = \frac{n^2+n}{d_a n + p_a} \Rightarrow n^2 + n = d_a \cdot d_b \cdot n^2 + (d_a \cdot p_b + d_b \cdot p_a)n + p_a \cdot p_b$$

所以可得方程组

$$\begin{cases} d_a \cdot d_b = 1 \\ d_a \cdot p_b + d_b \cdot p_a = 1 \\ p_a \cdot p_b = 0 \\ 50(d_a - d_b) + p_a - p_b = 1 \end{cases}$$

解得  $d = d_a = \frac{51}{50}$



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线