高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 z 满足 $(1+i)^2z=3+4i$，则在复平面内 z 的共轭复数所对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 已知全集 $U=\{x\in\mathbf{Z}|x^2-9x-10<0\}$，集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}|(x-1)(8-x)\geqslant0\}$，$B=\{1,2,4,5,7,8\}$，则集合 $\{0,3,6,9\}$ 为

A. $(\complement_UA)\cap B$　　B. $A\cap(\complement_UB)$　　C. $\complement_U(A\cup B)$　　D. $\complement_U(A\cap B)$

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 的顶点为 O，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边与圆 $x^2+y^2=9$ 相交于点 $\left(\frac{3\sqrt{5}}{5},t\right)$，则 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=$

A. $-\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

4. 将半径为 6 的半圆卷成一个无底圆锥(衔接处不重合)，则该无底圆锥的体积为

A. $27\sqrt{3}\pi$　　B. 27π　　C. $9\sqrt{3}\pi$　　D. 9π

5. 计算机是 20 世纪最伟大的发明之一，被广泛地应用于工作和生活之中，在进行计算和信息处理时，使用的是二进制. 已知一个十进制数 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 可以表示成二进制数 $(a_0a_1a_2\cdots a_k)_2(k\in\mathbf{N})$，且 $n=a_0\times2^k+a_1\times2^{k-1}+a_2\times2^{k-2}+\cdots+a_k\times2^0$，其中 $a_0=1$，$a_i\in\{0,1\}(i=1,2,3,\cdots,k)$. 记 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_k$ 中 1 的个数为 $f(n)$，若 $k=9$，则满足 $f(n)=6$ 的 n 的个数为

A. 126　　B. 84　　C. 56　　D. 36

6. 纯电动汽车是以车载电源为动力，用电机驱动车轮行驶，符合道路交通、安全法规各项要求的车辆，它使用存储在电池中的电来发动. 因其对环境影响较小，逐渐成为当今世界的乘用车的发展方向. 研究发现电池的容量随放电电流的大小而改变，1898 年 Peukert 提出铅酸电池的容量 C、放电时间 t 和放电电流 I 之间关系的经验公式：$C=I^{\lambda}t$，其中 λ 为与蓄电池结构有关的常数(称为 Peukert 常数)，在电池容量不变的条件下，当放电电流为 15 A 时，放电时间为 30 h；当放电电流为 50 A 时，放电时间为 7.5 h，则该蓄电池的 Peukert 常数 λ 约为(参考数据：$\lg2\approx0.301$，$\lg3\approx0.477$)

A. 1.12　　B. 1.13　　C. 1.14　　D. 1.15

7. 将数列$\{a_n\}$中的所有项按每一行比上一行多两项的规则排成数表，已知表中的第一列 $a_1, a_2, a_5, \cdots$构成一个公差为 3 的等差数列，从第 2 行起，每一行都是公比为 $q(q>0)$ 的等比数列，若 $a_3=-8, a_{84}=80$，则 $q=$

第 1 行　a_1

第 2 行　a_2　a_3　a_4

第 3 行　a_5　a_6　a_7　a_8　a_9

…

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

8. 已知 F 是抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点，过点 F 且斜率为 2 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点，若 $|AF|\cdot|BF|=20$，则 $p=$

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

9. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$，$\exists x_1, x_2\in\mathbf{R}$，对 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$ 恒成立，且 $|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin\omega x-a\cos\omega x$ 的图象，则 $\varphi=$

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{12}$

10. 在正三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=6$，$PA=4\sqrt{3}$，若球 O 与三棱锥 $P-ABC$ 的六条棱均相切，则球 O 的表面积为

A. $(16-8\sqrt{3})\pi$　　B. $(19-8\sqrt{3})\pi$　　C. $(76-32\sqrt{3})\pi$　　D. $(19+8\sqrt{3})\pi$

11. 设双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的焦距为 $2c$，离心率为 e，且 $a, c, a+c$ 成等比数列，A 是 E 的一个顶点，F 是与 A 不在 y 轴同侧的焦点，B 是 E 的虚轴的一个端点，PQ 为 E 的任意一条不过原点且斜率为 $k(k\neq0)$ 的弦，M 为 PQ 中点，O 为坐标原点，则下列判断错误的是

A. E 的一条渐近线的斜率为$\sqrt{e}$

B. $AB\perp BF$

C. $k_{OM}\cdot k_{PQ}=e$（k_{OM}, k_{PQ}分别为直线 OM, PQ 的斜率）

D. 若 $OP\perp OQ$，则$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=e$ 恒成立

12. 若 $0<b<a<\frac{\pi}{2}$，则

A. $be^a-e^b<ae^b-e^a$　　B. $e^b+\frac{1}{e^a}+2a>e^a+\frac{1}{e^b}+2b$

C. $a\sin b+b<b\sin a+a$　　D. $\sin b\cos a>\sin a$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$，则 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 夹角的大小为________.

14. 已知直线 $l: x\cos\theta+y\sin\theta=2$ 与圆 $C: (x-3)^2+(y-4)^2=16$ 相切，则满足条件的直线 l 的条数为________. 来源：高三答案公众号

15. 已知函数 $f(x)=a^x+3x+1(a>0$ 且 $a\neq1)$，若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线与直线 $x+2y-1=0$ 垂直，则 $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上的最大值为________.

16. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=1$，$a_5=2$，$a_n\geqslant0$，对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n^2+a_{n+2}^2=2a_{n+1}^2$ 恒成立，若 $b_n=\frac{2}{(a_n+a_{n+1})(a_{n+1}+a_{n+2})(a_n+a_{n+2})}$，则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=$________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$a^2\cos B+ab\cos A-c^2=a^2-b^2$.

（1）求 B；

（2）若 $a=2,c>1$，延长 AB 到 D，使得 $BD=2c$，当$\frac{CD}{AC}$取得最大值时，求 c.

18.（本小题满分 12 分）

2023 年春节期间，科幻电影《流浪地球 2》上映，获得较好的评价，也取得了很好的票房成绩. 某平台为了解观众对该影片的评价情况（评价结果仅有“好评”“差评”），从平台所有参与评价的观众中随机抽取 400 人进行调查，数据如下表所示（单位：人）：

	好评	差评	合计
男性		80	200
女性	90		
合计			400

（1）把 2×2 列联表补充完整，并判断是否有 99.5％的把握认为“对该部影片的评价与性别有关”？

（2）若将频率视为概率，从抽取的 400 人中所有给出“好评”的观众中随机抽取 3 人，用随机变量 X 表示被抽到的女性观众的人数，求 X 的分布列和数学期望.

参考公式：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

参考数据：

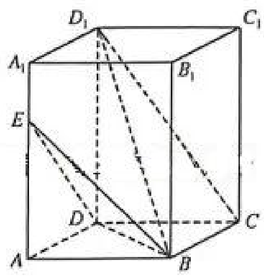
$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19.（本小题满分 12 分）

在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，平面 $D_1BC\perp$平面 D_1BD.

（1）求证：$BC\perp BD$；

（2）若 $AA_1=2BD=2BC=4$，探索在棱 AA_1 上是否存在一点 E，使得二面角 $E-BD-D_1$ 的大小为 30°？若存在，求出$\frac{AE}{AA_1}$的值；若不存在，请说明理由.



20.(本小题满分 12 分)

已知 F 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点,M 为右顶点,N 为上顶点,离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$,直线 l 与 C 相切于点 A,与 y 轴相交于点 B(异于点 A),$|OA|=|OB|$(O 为坐标原点),且$\triangle OAB$ 的面积为$\sqrt{3}$.

(1)求$\frac{|NF|}{|MN|}$;

(2)求 C 的方程.

21.(本小题满分 12 分)

已知 $f(x)=\ln x+ax\cos x-a\sin x(a\in\mathbf{R})$.

(1)证明:当 $a\leqslant 0$ 时,$f(x)$在$(0,\pi]$上单调递增;

(2)当 $a=1$ 时,关于 x 的不等式 $\ln x+x\cos x-\frac{kx}{e^x}\geqslant f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$上恒成立,求实数 k 的取值范围.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.(本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=2+t^2,\\y=3t\end{cases}$($t$ 为参数),以 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为 $\rho(\cos\theta-2\sin\theta)-3=0$.

(1)求 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(2)已知点 $P(3,0)$,l 与 C 交于 A,B 两点,求$\frac{|PA|}{|PB|}+\frac{|PB|}{|PA|}$的值.

23.(本小题满分 10 分)选修 4-5:不等式选讲

已知 a,b,c 均为正数,且 $2a+b+c=1$.

证明:(1)若 $b=c$,则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 8$;

(2)$2ab+2ac+bc\leqslant\frac{1}{3}$.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. A　由 $(1+i)^2z=3+4i$，得 $z=\frac{3+4i}{(1+i)^2}=\frac{3+4i}{2i}=\frac{(3+4i)\times(-i)}{2}=\frac{4-3i}{2}=2-\frac{3}{2}i$，所以 $\bar{z}=2+\frac{3}{2}i$，在复平面内其所对应的点为 $\left(2,\frac{3}{2}\right)$，位于第一象限. 故选 A.

2. D　由题意知 $U=\{x\in \mathbf{Z}|-1<x<10\}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A=\{x\in \mathbf{Z}|1\leqslant x\leqslant 8\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，所以 $A\cap B=\{1,2,4,5,7,8\}$，$\{0,3,6,9\}=\complement_U(A\cap B)$. 故选 D.

3. B　因为 α 的终边与圆 $x^2+y^2=9$ 相交于点 $\left(\frac{3\sqrt{5}}{5},t\right)$，所以 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-1=-\frac{3}{5}$. 故选 B.

4. C　由题意知所卷成的无底圆锥母线长为 6，设该无底圆锥的底面半径为 r，高为 h，则 $2\pi r=6\pi$，所以 $r=3$，所以 $h=\sqrt{36-9}=3\sqrt{3}$，所以 $V=\frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times3\sqrt{3}=9\sqrt{3}\pi$. 故选 C.

5. A　由题意得 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_9$ 中 1 的个数为 6，因为 $a_0=1$，所以 $a_1,a_2,\cdots,a_9$ 中 1 的个数为 5，所以满足 $f(n)=6$ 的 n 的个数为 $C_9^5=\frac{9\times8\times7\times6\times5}{5\times4\times3\times2\times1}=126$. 故选 A.

6. B　由题意知 $C=15^\lambda\times30=50^\lambda\times7.5$，所以 $\left(\frac{50}{15}\right)^\lambda=\frac{30}{7.5}=4$，两边取以 10 为底的对数，得 $\lambda\lg\frac{10}{3}=2\lg 2$，所以 $\lambda=\frac{2\lg 2}{1-\lg 3}\approx\frac{2\times0.301}{1-0.477}\approx1.15$. 故选 B.

7. A　由题意知 $a_3=a_2q=-8$，所以 $a_2=-\frac{8}{q}$，第 n 行的项的个数为 $2n-1$，所以从第 1 行到第 n 行的所有项的个数之和为 $\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$，$84=9^2+3$，所以 a_{84} 是第 10 行第 3 个数，所以 $a_{84}=a_{82}q^2=(a_2+8\times3)q^2=\left(-\frac{8}{q}+24\right)q^2=-8q+24q^2=80$，解得 $q=2$，或 $q=-\frac{5}{3}$（舍）. 故选 A.

8. A　法一：由题意知 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，故 l 的方程为 $x=\frac{1}{2}y+\frac{p}{2}$，与 C 的方程联立，得 $y^2-py-p^2=0$，显然 $\Delta>0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=p$，$y_1y_2=-p^2$，所以 $x_1+x_2=\frac{1}{2}(y_1+y_2)+p=\frac{3p}{2}$，$x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{4p^2}=\frac{p^2}{4}$，又 $|AF|=\frac{p}{2}+x_1$，$|BF|=\frac{p}{2}+x_2$，所以 $|AF|\cdot|BF|=\left(\frac{p}{2}+x_1\right)\left(\frac{p}{2}+x_2\right)=\frac{p^2}{4}+\frac{p}{2}(x_1+x_2)+x_1x_2=\frac{5p^2}{4}=20$，所以 $p=4$. 故选 A.

法二：由题意得直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{5}}{5}t,\\ y=\frac{2\sqrt{5}}{5}t\end{cases}$（$t$ 为参数），代入 $y^2=2px$，整理得，$4t^2-2\sqrt{5}pt-5p^2=0$，显然 $\Delta>0$，设该方程的两根为 t_1,t_2，则 $|AF|\cdot|BF|=|t_1t_2|=\frac{5p^2}{4}=20$，所以 $p=4$. 故选 A.

9. B　法 1：由题意知 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$（$T$ 为函数 $f(x)$ 的最小正周期），则 $T=\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，将 $f(x)$ 的图象向右平移 φ 个单位长度得到 $y=2\sin\left(2x-2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$，即 $y=\sin 2x-a\cos 2x$，又函数 $y=\sin 2x-a\cos 2x=$　　tan θ

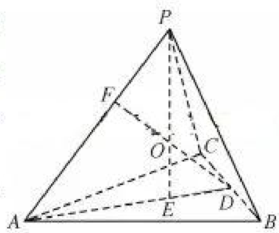
$=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\Big)$,所以 $2=\sqrt{1+a^2}$,则 $a=\pm\sqrt{3}$;当 $a=\sqrt{3}$ 时,$y=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(2x-2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$,

则 $-2\varphi+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}-k\pi(k\in\mathbf{Z})$,又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$;当 $a=-\sqrt{3}$ 时,$y=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(2x-2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$,则 $-2\varphi+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{12}-k\pi,k\in\mathbf{Z}$,又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,故无解.综

上,$\varphi=\frac{\pi}{4}$.故选 B.

法 2:由题意,$\frac{T}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$($T$ 为 $f(x)$ 的最小正周期),解得 $\omega=2$.将 $f(x)$ 的图象向右平移 φ 个单位长度得到 $y=2\sin\left(2x-2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin 2x\cos\left(-2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)+2\cos 2x\sin\left(-2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$,即 $y=\sin 2x-a\cos 2x$,可见 $2\cos\left(-2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)=1$,即 $\cos\left(-2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.由 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,得 $-2\varphi+\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$.从而 $-2\varphi+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.故选 B.



10. C　取 $\triangle ABC$ 的中心 E,连接 PE,则 $PE\perp$ 平面 ABC,且与棱均相切的球的球心 O 在 PE 上,连接 AE 并延长交 BC 于 D,则 D 为 BC 的中点,$AD\perp BC$,连接 OD,易证 $BC\perp OD$,过 O 作 $OF\perp PA$,交 PA 于点 F,设球 O 的半径为 r,则 $OD=OF=r$,由题意易求得 $AD=3\sqrt{3}$,$AE=2\sqrt{3}$,$ED=\sqrt{3}$,$PE=6$,在 $\mathrm{Rt}\triangle PAE$ 中,$\sin\angle APE=\frac{AE}{AP}=\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$,所以 $\angle APE=30^\circ$,设 $OE=t(0<t<6)$,则 $PO=2OF=2r$.因为 $r=\sqrt{t^2+3}$,从而 $t+2\sqrt{t^2+3}=6$,所以 $t=2\sqrt{3}-2$,所以 $r^2=(2\sqrt{3}-2)^2+3=19-8\sqrt{3}$.故球 O 的表面积为 $(76-32\sqrt{3})\pi$.

11. D　因为 $a,c,a+c$ 成等比数列,所以 $c^2=ac+a^2$,所以 $b^2=ac$ 且 $e^2-e-1=0$,解得 $e=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$(负根舍),所以 $\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{ac}{a^2}=\frac{c}{a}=e$,所以 $\frac{b}{a}=\sqrt{e}$,即 E 的一条渐近线的斜率为 $\sqrt{e}$,故 A 正确;不妨设 F 为左焦点,B 为虚轴的上端点,A 为右顶点,则 BF 的斜率 $k_{BF}=\frac{b}{c}$,AB 的斜率 $k_{AB}=-\frac{b}{a}$,所以 $k_{BF}\cdot k_{AB}=-\frac{b^2}{ac}=-1$,所以 $AB\perp BF$,故 B 正确;设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,$M(x_0,y_0)$,则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 作差后整理得 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\frac{b^2}{a^2}$,即 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_0}{x_0}=\frac{b^2}{a^2}$,所以 $k_{PQ}\cdot k_{OM}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{ac}{a^2}=\frac{c}{a}=e$,故 C 正确;设直线 $OP:y=kx$,则直线 $OQ:y=-\frac{1}{k}x$,将 $y=kx$ 代入双曲线方程 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$,得 $x^2=\frac{a^2b^2}{b^2-a^2k^2}$,则 $y^2=\frac{a^2b^2k^2}{b^2-a^2k^2}$,$\therefore |OP|^2=x^2+y^2=\frac{a^2b^2(k^2+1)}{b^2-a^2k^2}$,将 k 换成 $-\frac{1}{k}$ 得 $|OQ|^2=\frac{a^2b^2(k^2+1)}{b^2k^2-a^2}$,则 $\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{(b^2-a^2)(k^2+1)}{a^2b^2(k^2+1)}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2b^2}$ 与 b 的值有关,故 D 错误.故选 D.

12. C　对于 A,令 $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$ 且 $0<x<\frac{\pi}{2}$,则 $f'(x)=\frac{xe^x}{(x+1)^2}>0$,故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,则 $f(a)>f(b)$,即 $\frac{e^a}{a+1}>\frac{e^b}{b+1}$,所以 $e^a(b+1)>e^b(a+1)$,即 $be^a-e^b>ae^b-e^a$,故 A 错误;对于 B,令 $f(x)=e^x-\frac{1}{e^x}-2x$ 且 $0<x<\frac{\pi}{2}$,则 $f'(x)=e^x+\frac{1}{e^x}-2>2\sqrt{e^x\cdot\frac{1}{e^x}}-2=0$,故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,则 $f(a)>f(b)$,即 $e^b-\frac{1}{e^b}-2b<e^a-\frac{1}{e^a}-2a$,所以 $e^b+\frac{1}{e^a}+2a<e^a+\frac{1}{e^b}+2b$,故 B 错误;对于 C,令 $f(x)=\frac{\sin x-1}{x}$ 且 $0<x<\frac{\pi}{2}$,则 f'

故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，则 $f(a)>f(b)$，即 $\frac{\sin a-1}{a}>\frac{\sin b-1}{b}$，所以 $b(\sin a-1)>a(\sin b-1)$，则 $a\sin b+b<b\sin a+a$，故 C 正确；对于 D，当 $b=\frac{\pi}{6}$，$a=\frac{\pi}{3}$ 时，$\sin b\cos a=\frac{1}{4}<\sin a=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 D 错误. 故选 C.

13. $\frac{\pi}{3}$　因为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$，所以 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=7$，因为 $|\boldsymbol{a}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，所以 $|\boldsymbol{b}|=1$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$，又 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$.

14. 2　原点到 l 的距离 $d_1=\frac{|-2|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=2$，C 到 l 的距离为 4，故满足条件的 l 既与圆 $x^2+y^2=4$ 相切，又与圆 C 相切，故 l 是圆 $x^2+y^2=4$ 和圆 C 的公切线，易知两圆相交，故公切线的条数为 2，即符合条件的直线 l 有 2 条.

15. $7+\frac{1}{e^2}$　由题意得 $f'(x)=a^x\ln a+3$，所以 $f'(0)=\ln a+3$，因为切线与直线 $x+2y-1=0$ 垂直，所以切线斜率为 2，即 $\ln a+3=2$，解得 $a=e^{-1}$，所以 $f(x)=e^{-x}+3x+1$，且 $f'(x)=-e^{-x}+3$，显然 $f'(x)$ 是增函数，当 $x\in[-1,2]$ 时，$f'(x)\geqslant f'(-1)=3-e>0$，所以 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上单调递增，故 $f(x)_{\max}=f(2)=7+\frac{1}{e^2}$.

16. $1+\sqrt{n}-\sqrt{n+1}$　因为对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n^2+a_{n+2}^2=2a_{n+1}^2$，所以 $\{a_n^2\}$ 成等差数列，又 $a_2=1$，$a_5=2$，所以 $\{a_n^2\}$ 的公差 $d=\frac{a_5^2-a_2^2}{3}=\frac{4-1}{3}=1$，所以 $a_n^2=a_2^2+(n-2)d=1+n-2=n-1$，又 $a_n\geqslant 0$，所以 $a_n=\sqrt{n-1}$，所以 $b_n=\frac{2}{(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}=\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})-(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}=\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$，所以 $S_n=\left(\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=1+\sqrt{n}-\sqrt{n+1}$.

17. 解：(1) 因为 $a^2\cos B+ab\cos A-c^2=a^2-b^2$，所以 $a^2\cos B+ab\cos A=a^2+c^2-b^2$，

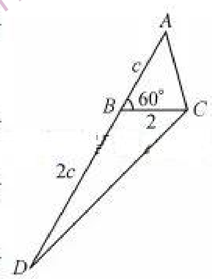
所以 $a(a\cos B+b\cos A)=2ac\cos B$，…… 2 分

所以 $a\cos B+b\cos A=2c\cos B$，所以 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos B$，

所以 $\sin(A+B)=2\sin C\cos B$，即 $\sin C=2\sin C\cos B$．…… 4 分

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq 0$，所以 $\cos B=\frac{1}{2}$，…… 5 分

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$．…… 6 分



(2) 在 $\triangle ABC$ 中，$AC^2=a^2+c^2-2ac\cos B=4+c^2-2c$；

在 $\triangle BCD$ 中，$CD^2=a^2+(2c)^2-2a\cdot 2c\cdot\cos\angle DBC=4+4c^2+4c$，…… 8 分

所以 $\frac{CD^2}{AC^2}=\frac{4c^2+4+4c}{c^2+4-2c}=\frac{4(c^2-2c+4)+12c-12}{c^2-2c+4}=4+\frac{12(c-1)}{(c-1)^2+3}$．…… 9 分

因为 $c>1$，所以 $c-1>0$，所以 $\frac{12(c-1)}{(c-1)^2+3}=\frac{12}{(c-1)+\frac{3}{c-1}}\leqslant\frac{12}{2\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$，…… 11 分

当且仅当 $c-1=\frac{3}{c-1}$，即 $c=\sqrt{3}+1$ 时等号成立.

故当$\frac{CD}{AC}$取得最大值时，$c=\sqrt{3}+1$. …………………………………………………………………… 12 分

18. 解：(1)2×2 列联表补充完整如下：

	好评	差评	合计
男性	120	80	200
女性	90	110	200
合计	210	190	400

……… 2 分

$K^2=\frac{400\times(120\times110-90\times80)^2}{210\times190\times200\times200}\approx9.023>7.879$,

因此有 99.5%的把握认为"对该部影片的评价与性别有关". ………………………………………………… 4 分

(2)从抽取的 400 人中所有给出"好评"的观众中随机抽取 1 人为女性的概率 $P=\frac{90}{210}=\frac{3}{7}$，且各次抽取之间相互独立，

故 $X\sim B\left(3,\frac{3}{7}\right)$, ………………………………………………………………………………… 5 分

所以 $P(X=0)=C_3^0\times\left(\frac{3}{7}\right)^0\times\left(\frac{4}{7}\right)^3=\frac{64}{343}$，$P(X=1)=C_3^1\times\left(\frac{3}{7}\right)^1\times\left(\frac{4}{7}\right)^2=\frac{144}{343}$, ………………………… 7 分

$P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{3}{7}\right)^2\times\left(\frac{4}{7}\right)^1=\frac{108}{343}$，$P(X=3)=C_3^3\times\left(\frac{3}{7}\right)^3\times\left(\frac{4}{7}\right)^0=\frac{27}{343}$, ………………………………… 9 分

故 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{64}{343}$	$\frac{144}{343}$	$\frac{108}{343}$	$\frac{27}{343}$

……… 10 分

所以 $E(X)=0\times\frac{64}{343}+1\times\frac{144}{343}+2\times\frac{108}{343}+3\times\frac{27}{343}=\frac{9}{7}$. ………………………………………… 12 分

或 $E(X)=3\times\frac{3}{7}=\frac{9}{7}$. ……………………………………………………………………………… 12 分

19. (1)证明：由题意知 $DD_1\perp$平面 $ABCD$，$BC\subset$平面 $ABCD$，所以 $DD_1\perp BC$. …………………………… 1 分

过 D 在平面 D_1BD 内作直线 $DG\perp D_1B$ 交 D_1B 于点 G, ……………………………………………… 2 分

因为平面 $D_1BC\perp$平面 D_1BD，平面 $D_1BC\cap$平面 $D_1BD=D_1B$，$DG\subset$平面 D_1BD,

所以 $DG\perp$平面 D_1BC. ……………………………………………………………………………… 3 分

又 $BC\subset$平面 D_1BC，所以 $DG\perp BC$. ……………………………………………………………… 4 分

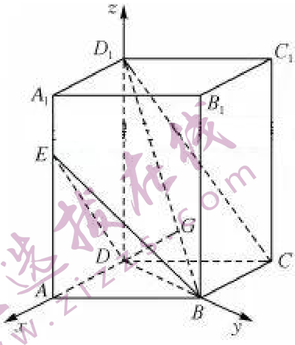
因为 $D_1D\cap DG=D$，D_1D，$DG\subset$平面 D_1BD，所以 $BC\perp$平面 D_1BD, …………………………………… 5 分

又 $BD\subset$平面 D_1BD，所以 $BC\perp BD$. ……………………………………………………………… 6 分

(2)解：由(1)知 $BC\perp BD$，因为 $DA// BC$，所以 $AD\perp DB$，又 $DD_1\perp$平面 $ABCD$，且 DA，$DB\subset$平面 $ABCD$，所以 $DD_1\perp DA$，$DD_1\perp DB$，故以 D 为坐标原点，直线 DA，DB，DD_1 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$，设 $AE=\lambda$ $(0<\lambda\leqslant4)$，则 $E(2,0,\lambda)$，$B(0,2,0)$，故 $\overrightarrow{DE}=(2,0,\lambda)$，$\overrightarrow{DB}=(0,2,0)$. ……………………………… 8 分

设平面 BDE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}2y=0,\\ 2x+\lambda z=0,\end{cases}$

令 $z=2$，则 $y=0$，$x=-\lambda$，所以 $\boldsymbol{n}=(-\lambda,0,2)$, …………………………………………………… 9 分



显然平面 BDD_1 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$，

所以 $|\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $\lambda=2\sqrt{3}$（负根舍）．……… 11 分

所以在棱 AA_1 存在点 E，使得二面角 $E-BD-D_1$ 的大小为 $30°$，且 $\dfrac{AE}{AA_1}=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

…………………………………………………………………… 12 分

20．解：(1)因为 C 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $b^2=\dfrac{1}{3}a^2$， ………… 2 分

所以 $\dfrac{|NF|}{|MN|}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+\frac{1}{3}a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………… 4 分

(2)由题意知直线 l 的斜率存在且不为 0，设其方程为 $y=kx+t(k\neq0)$，

由(1)知 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{3b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$， ……………………………………………… 5 分

联立 $\begin{cases}y=kx+t,\\ \dfrac{x^2}{3b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 得 $(3k^2+1)x^2+6ktx+3t^2-3b^2=0$，……………………………… 6 分

由题意知 $\Delta=36k^2t^2-4(3k^2+1)(3t^2-3b^2)=0$，

所以 $t^2=b^2(3k^2+1)$，① ……………………………………………………………… 7 分

设 $A(x_0,y_0)$，则 $x_0=-\dfrac{3kt}{3k^2+1}$，$y_0=kx_0+t=\dfrac{t}{3k^2+1}$. ……………………………… 8 分

因为 $|OA|=|OB|$，所以 $\left(-\dfrac{3kt}{3k^2+1}\right)^2+\left(\dfrac{t}{3k^2+1}\right)^2=t^2$，化简得 $k^2=\dfrac{1}{3}$，② ……………… 9 分

又 $\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{3}$，所以 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}\times\sqrt{1+k^2}\left|-\dfrac{3kt}{3k^2+1}-0\right|=\sqrt{3}$，③ ……………… 10 分

由①②③得 $t^2=4$，$b^2=2$，从而 $a^2=6$，

所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ……………………………………………… 12 分

21．(1)证明：因为 $f(x)=\ln x+ax\cos x-a\sin x$，

所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+a\cos x-ax\sin x-a\cos x=\dfrac{1}{x}-ax\sin x$， ……………………………… 1 分

因为 $x\in(0,\pi]$，所以 $\sin x\geqslant0$，又 $a\leqslant0$，所以 $f'(x)>0$， ……………………………… 2 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,\pi]$ 上单调递增. ……………………………………………………… 3 分

(2)解：当 $a=1$ 时，$\ln x+x\cos x-\dfrac{kx}{e^x}\geqslant f(x)$，

即 $\ln x+x\cos x-\dfrac{kx}{e^x}\geqslant\ln x+x\cos x-\sin x$，

所以 $\dfrac{kx}{e^x}\leqslant\sin x$，即 $e^x\sin x-kx\geqslant0$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立. ……………………………… 4 分

令 $g(x)=e^x\sin x-kx$，则 $g'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x-k$，

令 $h(x)=e^x\sin x+e^x\cos x-k$，

则 $h'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x+e^x\cos x-e^x\sin x=2e^x\cos x$. ……………………………… 5 分

因为 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，所以 $\cos x\geqslant0$，所以 $h'(x)\geqslant0$，

所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，所以 $h(x)>h(0)=1-k$. ………………………………… 6 分

①当 $1-k\geqslant0$，即 $k\leqslant1$ 时，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上，$h(x)>0$，即 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，所以对 $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，$g(x)>g(0)=0$，即 $g(x)>0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立，符合题意；………………………… 7 分

②当 $1-k<0$，即 $k>1$ 时，$h(0)<0$，

又 $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}-k$，若 $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}-k\leqslant0$，则在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上，$h(x)\leqslant0$，即 $g'(x)\leqslant0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，所以 $g(x)<g(0)=0$，不合题意；………………………………… 9 分

若 $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}-k>0$，则存在 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $h(x_0)=0$，

所以在 $(0,x_0)$ 上，$h(x)<0$，即 $g'(x)<0$，

所以在 $(0,x_0)$ 上，$g(x)$ 单调递减，所以对 $x\in(0,x_0)$，$g(x)<g(0)=0$ 不合题意. ……………… 11 分

综上所述，关于 x 的不等式 $\ln x+x\cos x-\frac{kx}{e^x}\geqslant f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立，实数 k 的取值范围为 $(-\infty,1]$. … 12 分

22. 解：(1)因为 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t^2,\\ y=3t,\end{cases}$ 所以 $t=\frac{y}{3}$，代入消去参数 t，得 $x=2+\frac{y^2}{9}$，

所以曲线 C 的普通方程为 $y^2-9x+18=0$. ………………………………… 3 分

因为 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，所以 l 的直角坐标方程为 $x-2y-3=0$. ……………………… 5 分

(2)由题意知点 P 在直线 l 上，故直线 l 的参数方程可以写为 $\begin{cases}x=3+\frac{2}{\sqrt5}s,\\ y=\frac{1}{\sqrt5}s\end{cases}$ (s 为参数)，代入 C 的普通方程，

得 $s^2-18\sqrt5 s-45=0$，………………………………… 7 分

所以 $\Delta=(-18\sqrt5)^2+180>0$，设 A,B 所对应的参数分别为 s_1,s_2，则 $s_1+s_2=18\sqrt5$，$s_1s_2=-45$，

所以 $\frac{|PA|}{|PB|}+\frac{|PB|}{|PA|}=\left|\frac{s_1}{s_2}\right|+\left|\frac{s_2}{s_1}\right|=\frac{|s_1|^2+|s_2|^2}{|s_1s_2|}=\frac{(s_1+s_2)^2-2s_1s_2}{|s_1s_2|}=\frac{18^2\times5+90}{45}=38$. ……………… 10 分

23. 证明：(1)因为 $b=c$，且 a,b,c 均为正数，所以 $2a+2b=1$，………………………………… 1 分

则 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(2a+2b)=4+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant4+2\sqrt{\frac{2b}{a}\times\frac{2a}{b}}=8$，………………………………… 3 分

当且仅当 $a=b=\frac{1}{4}$ 时，等号成立，故 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant8$. ………………………………… 5 分

(2)由基本不等式可得 $4a^2+b^2\geqslant4ab$，当且仅当 $b=2a$ 时等号成立，

$4a^2+c^2\geqslant4ac$，当且仅当 $c=2a$ 时等号成立，

$c^2+b^2\geqslant2bc$，当且仅当 $b=c$ 时等号成立，

所以 $4a^2+b^2+c^2\geqslant2ab+bc+2ac$，当且仅当 $b=c=2a$ 时等号成立. ……………………… 8 分

又 $(2a+b+c)^2=4a^2+b^2+c^2+4ab+2bc+4ac\geqslant6ab+3bc+6ac$，

又 $2a+b+c=1$，

所以 $2ab+bc+2ac\leqslant\frac{1}{3}$，当且仅当 $a=\frac{1}{6}$，$b=c=\frac{1}{3}$ 时等号成立. ……………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。