

平许济洛 2022-2023 学年高三第二次质量检测

文科数学答案

一、选择题：（本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. D 2. A 3. C 4. D 5. D 6. B
7. A 8. C 9. B 10. B 11. A 12. D

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. -3 14. $4\sqrt{3}$ 15. $\frac{9}{2}\pi$ 16. $\frac{5}{12}$

三、解答题：（共 70 分）

17. 解：（1）由散点图中数据和参考数据得 $\bar{x} = \frac{4.5+5+6+7+7.5}{5} = 6$,

$\bar{y} = 135$ 1 分

$\therefore \hat{b} = \frac{(-1.5) \times 36 + (-1) \times 30 + 0 \times (-5) + 1 \times (-26) + 1.5 \times (-35)}{(-1.5)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 1.5^2} = -25$,

$\hat{a} = 135 - (-25) \times 6 = 285$, 5 分

所以 y 与 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = -25x + 285$ 6 分

（2）将 $y = 160$ 代入回归方程得 $x = 5$ ，所以该跑者跑完马拉松全程所花的时间为

$42 \times 5 = 210$ 分钟, 8 分

从马拉松比赛前 3000 名跑者成绩的频率分布直方图可知成绩好于 210 分钟的累计频率为

$0.0008 \times 50 + 0.0024 \times (210 - 200) = 0.064$, 10 分

有 6.4% 的跑者成绩超过该跑者，则该跑者在本次比赛获得的名次大约

是 $0.064 \times 3000 = 192$ 名. 12 分

18. 解：（1）依题意， $c \cdot \cos A + \sqrt{3}c \sin A - a - b = 0$,

故 $\sin C \cos A + \sqrt{3} \sin C \sin A - \sin A - \sin B = 0$,

则 $\sin C \cos A + \sqrt{3} \sin C \sin A - \sin A - \sin(A+C) = 0$, 3 分

$\sin C \cos A + \sqrt{3} \sin C \sin A - \sin A - \sin A \cos C - \cos A \sin C = 0$,

所以 $\sqrt{3} \sin C \sin A - \sin A - \sin A \cos C = 0$,

由于 $0 < A < \pi$, 所以 $\sin A > 0$, 所以 $\sqrt{3} \sin C - 1 - \cos C = 0$,

$$\text{故 } 2 \sin(C - \frac{\pi}{6}) = 1$$

由于 $0 < C < \pi$, 则 $C = \frac{\pi}{3}$ 6 分

$$(2) \text{ 由题意, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{4} ab = 4\sqrt{3},$$

所以 $ab = 16$ 8 分

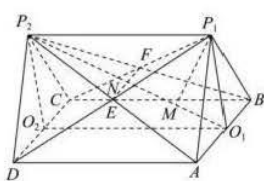
$$\text{又由余弦定理 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \quad c = 4$$

$$\text{即 } a^2 + b^2 - ab = 16, \text{ 所以 } a^2 + b^2 = 32, \quad \text{..... 10 分}$$

所以 $a = b = 4$ 12 分

19. 证明: (1) 连接 P_1P_2 , O_1O_2 , 如图, 因为 $P_1O_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $P_2O_2 \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $P_1O_1 \parallel P_2O_2$, 又 $P_1O_1 = P_2O_2$, 所以四边形 $P_1O_1O_2P_2$ 是矩形, 3 分



所以 $P_1P_2 \parallel O_1O_2$, $P_1P_2 = O_1O_2$

又 O_1, O_2 分别为 AB, CD 的中点, 所以 $O_1O_2 \parallel AD$, $O_1O_2 = AD$,

所以 $P_1P_2 \parallel AD$, $P_1P_2 = AD$,

所以四边形 P_1P_2DA 是平行四边形, 5 分

又对角线 $P_2A \cap DP_1 = E$, 所以点 E 为线段 P_2A 的中点. 6 分

(2) 连接 P_2O_1 , 交 EF 于点 N , 过点 P_1 作 $P_1M \perp P_2O_1$ 于 M , 7 分

由题意知 $P_2A = P_2B$, 故 $P_2O_1 \perp AB$,

又 $P_1O_1 \perp AB$, $P_2O_1 \cap P_1O_1 = O_1$, $P_2O_1, P_1O_1 \subset$ 平面 $P_2P_1O_1$,

所以 $AB \perp$ 平面 $P_2P_1O_1$, 8 分

故 $AB \perp P_1M$, 又 $P_2O_1 \cap AB = O_1$, $P_2O_1, AB \subset$ 平面 P_2AB ,

所以 $P_1M \perp$ 平面 P_2AB , 即 P_1M 是四棱锥 P_1-ABFE 的高, 9 分

由 (1) 同理可得点 F 为线段 P_2B 的中点, 所以 $EF \parallel AB$, $EF = \frac{1}{2} AB = 2$,

在 $\text{Rt}\triangle P_2O_2O_1$ 中, $P_2O_1 = 2\sqrt{5}$, 则 $NO_1 = \sqrt{5}$,

所以 $S_{\text{梯形}AEFB} = \frac{1}{2}(2+4) \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$,

$$\therefore P_1M = P_1O_1 \sin \angle P_1O_1M = 2 \times \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}, \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore V = V_{P_1-ABCD} - V_{P_1-ABEF} = \frac{1}{3} \times 2 \times 4^2 - \frac{1}{3} \times 3\sqrt{5} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{20}{3}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. (1) 解: $f'(x) = 2x + 2 - a\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \frac{2x^2 - (a-2)x - a}{x} = \frac{(2x-a)(x+1)}{x} \quad (x > 0).$
 $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, +\infty)$.
 $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 得 $x > \frac{a}{2}$; 由 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < \frac{a}{2}$.

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left(\frac{a}{2}, +\infty\right)$, 单调减区间为 $\left(0, \frac{a}{2}\right)$.
 $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 证明: 因为 x_1, x_2 是方程 $f(x) = c$ 的两个不等实根, 由 (1) 知 $a > 0$.

$$\text{不妨设 } 0 < x_1 < x_2, \text{ 则 } x_1^2 + 2x_1 - a(\ln x_1 + x_1) = c, \quad x_2^2 + 2x_2 - a(\ln x_2 + x_2) = c$$

$$\text{两式相减得 } x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2x_2 = ax_1 + a \ln x_1 - ax_2 - a \ln x_2 = a(x_1 + \ln x_1 - x_2 - \ln x_2).$$

$$\text{所以 } a = \frac{x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2x_2}{x_1 + \ln x_1 - x_2 - \ln x_2}. \text{ 因为 } f'\left(\frac{a}{2}\right) = 0, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{当 } x \in \left(0, \frac{a}{2}\right) \text{ 时, } f'(x) < 0, \quad \text{当 } x \in \left(\frac{a}{2}, +\infty\right) \text{ 时, } f'(x) > 0,$$

$$\text{要证原命题成立, 只需证 } \frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{a}{2} \text{ 即可, 即证明 } x_1 + x_2 > \frac{x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2x_2}{x_1 + \ln x_1 - x_2 - \ln x_2},$$

$$\text{即证明 } x_1^2 - x_2^2 + (x_1 + x_2)(\ln x_1 - \ln x_2) < x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2x_2,$$

$$\text{即证明 } \ln \frac{x_1}{x_2} < \frac{2x_1 - 2x_2}{x_1 + x_2}. \text{ 设 } t = \frac{x_1}{x_2} \quad (0 < t < 1), \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{令 } g(t) = \ln t - \frac{2t-2}{t+1}, \text{ 则 } g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

因为 $t \in (0,1)$, 所以 $g'(t) > 0$, $g(t)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数, 故 $g(t) < g(1) = 0$,

所以当 $t \in (0,1)$ 时, $g(t) < 0$ 总成立. 所以原题得证. 12 分

21. 解: (1) 由题意得 $a=2$, 设 $|PF_1|, |PF_2|$ 的长分别为 m, n , $m+n=2a=4$, 则

$$\cos \angle F_1 P F_2 = \frac{m^2 + n^2 - 4c^2}{2mn} = \frac{(m+n)^2 - 4c^2 - 2mn}{2mn} = \frac{2b^2}{mn} - 1 \geq \frac{2b^2}{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2} - 1 = \frac{2b^2}{a^2} - 1$$

当且仅当 $m=n$ 时取等号, 3 分

$$\text{从而 } \frac{2b^2}{a^2} - 1 = \frac{1}{2}, \text{ 得 } \frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{4}, \therefore b^2 = 3,$$

$$\text{则椭圆的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

由题意, 根据椭圆的定义可得 $\triangle F_1 M N$ 的周长为 $4a=8$,

$$S_{\triangle N M F_1} = \frac{1}{2}(|F_1 M| + |F_1 N| + |NM|)r = 4r, \text{ 所以 } r = \frac{1}{4} S_{\triangle N M F_1}, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

设 l 的方程为 $x = ty + 1$, 联立椭圆方程 $3x^2 + 4y^2 = 12$,

$$\text{可得 } (4+3t^2)y^2 + 6ty - 9 = 0, \quad y_1 + y_2 = -\frac{6t}{4+3t^2}, \quad y_1 y_2 = -\frac{9}{4+3t^2},$$

$$S_{\triangle N M F_1} = S_{\triangle F_1 F_2 M} + S_{\triangle F_1 F_2 N} = \frac{1}{2}|F_1 F_2| \cdot |y_2| + \frac{1}{2}|F_1 F_2| \cdot |y_1| = \frac{1}{2}|F_1 F_2| \cdot |y_2 - y_1| = \frac{1}{2}|F_1 F_2| \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{\left(-\frac{6t}{4+3t^2}\right)^2 - 4\left(-\frac{9}{4+3t^2}\right)} = \frac{12\sqrt{t^2+1}}{4+3t^2},$$

$$\text{所以 } r = \frac{1}{4} S_{\triangle N M F_1} = \frac{3\sqrt{t^2+1}}{4+3t^2}, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{令 } \sqrt{t^2+1} = k, \text{ 则 } k \geq 1, \quad r = \frac{3k}{3k^2+1} = \frac{3}{3k + \frac{1}{k}},$$

由函数 $f(x) = 3x + \frac{1}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $3k + \frac{1}{k} \geq 4$,

$$\text{所以 } 0 < \frac{3}{3k + \frac{1}{k}} \leq \frac{3}{4}, \text{ 即 } 0 < r \leq \frac{3}{4}$$

$$\text{故 } 0 < r \leq \frac{3}{4}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. 解 (1) 由 M 的参数方程可得 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$,

$$\text{即 } x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3, \therefore \rho^2 - 2\rho \cos \theta - 2\rho \sin \theta = 3 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

由题设知: l_1 为 $y = \tan \alpha \cdot x$, 故 l_1 的极坐标方程为 $\theta = \alpha, (\rho \in \mathbb{R})$,

$$\text{又 } l_2 \perp l_1, \therefore l_2 \text{ 的极坐标方程为 } \theta = \alpha + \frac{\pi}{2}, (\rho \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})). \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 记 } \rho_1 = |OA|, \rho_2 = |OB|, \rho_3 = |OC|, \rho_4 = |OD|,$$

$$\text{联立 } l_1 \text{ 与 } M \text{ 得 } \rho^2 - 2\rho(\cos \alpha + \sin \alpha) - 3 = 0$$

$$\therefore \rho_1 + \rho_3 = 2(\cos \alpha + \sin \alpha), \rho_1 \rho_3 = -3$$

同理联立 l_2 与 M 得

$$\rho_2 + \rho_4 = 2[\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) + \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})] = 2(\cos \alpha - \sin \alpha), \rho_2 \rho_4 = -3 \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 2(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2)$$

$$= 2\{[(\rho_1 + \rho_3)^2 - 2\rho_1\rho_3] + [(\rho_2 + \rho_4)^2 - 2\rho_2\rho_4]\} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$= 2 \times 20 = 40$$

23. 解 (1) 由 $f(1) = 1$ 得: $a + b + c = 1$,

$$\therefore 3(a + b + c) = [(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2](1^2 + 1^2 + 1^2) = 3, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{由柯西不等式得: } 3 = [(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2](1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2$$

当且仅当 $a = b = c = \frac{1}{3}$ 时等号成立,

$$\text{所以 } \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 由 $f(x) \geq 2ax + b$ 得: $ax^2 + (b-2a)x + (c-b) \geq 0$,

由题知: $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = (b-2a)^2 - 4a(c-b) \leq 0 \end{cases}$, 则 $b^2 \leq 4ac - 4a^2$,

$$\therefore \frac{b^2}{a^2 + c^2} \leq \frac{4ac - 4a^2}{a^2 + c^2} = \frac{\frac{4c}{a} - 4}{1 + \frac{c^2}{a^2}} = \frac{4\left(\frac{c}{a} - 1\right)}{\left(\frac{c}{a} - 1\right)^2 + 2\left(\frac{c}{a} - 1\right) + 2}; \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$\because 4ac - 4a^2 = 4a(c-a) \geq b^2 \geq 0$, 又 $a > 0$, $\therefore c \geq a$, 则 $\frac{c}{a} - 1 \geq 0$, $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

令 $t = \frac{c}{a} - 1$, 则 $t \geq 0$, 设 $g(t) = \frac{4t}{t^2 + 2t + 2} (t \geq 0)$,

当 $t = 0$ 时, $g(t) = 0$; $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$$\text{当 } t > 0 \text{ 时, } g(t) = \frac{4}{t + \frac{2}{t} + 2} \leq \frac{4}{2\sqrt{t \cdot \frac{2}{t}} + 2} = \frac{2}{\sqrt{2} + 1} = 2\sqrt{2} - 2$$

(当且仅当 $t = \sqrt{2}$ 时等号成立),

$\therefore \frac{b^2}{a^2 + c^2}$ 的最大值为 $2\sqrt{2} - 2$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线