

湖南省 2023 届高三九校联盟第二次联考



数 学

由 湖南师大附中 常德市一中 长沙市一中 双峰县一中 桑植县一中
武冈市一中 湘潭市一中 岳阳市一中 株洲市二中 联合命题

炎德文化审校、制作

命题学校：长沙市一中 审题学校：常德市一中

座位号

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再涂选其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \mid |x-1| < 1\}$, $B = \{x \mid x \geq a\}$, 且 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围为

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 0]$
C. $[0, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

2. 在复数范围内解得方程 $x^2 + 4x + 5 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 则 $|x_1 - x_2| =$

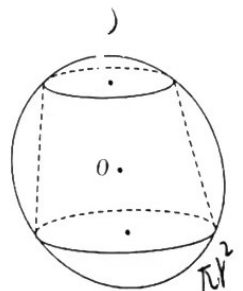
- A. 4 B. 1 C. 2 D. 3

3. 已知函数 $f(x) = \log_2 |\cos x|$, 则下列论述正确的是

- A. $\exists x_1, x_2 \in (0, 2\pi)$ 且 $x_1 \neq x_2$, 使 $f(x_1) + f(x_2) = 0$
B. $\forall x_1, x_2 \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$ 恒成立
C. 使 $f(x)$ 有意义的必要不充分条件为 $x \in \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$
D. 使 $f(x) \geq -\frac{1}{2}$ 成立的充要条件为 $x \in \{x \in \mathbf{R} \mid -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}\}$

4. 如图所示，一个球内接圆台，已知圆台上、下底面的半径分别为 3 和 4，球的表面积为 100π ，则该圆台的体积为

- A. $\frac{175\pi}{3}$ B. 75π
C. $\frac{238\pi}{3}$ D. $\frac{259\pi}{3}$



数学试题 第 1 页 (共 5 页)

5. 两千多年前,古希腊数学家阿波罗尼斯采用切割圆锥的方法研究圆锥曲线,他用平行于圆锥的轴的平面截取圆锥得到的曲线叫做“超曲线”,即双曲线的一支.已知圆锥 PQ 的轴截面为等边三角形,平面 $\alpha \parallel PQ$,平面 α 截圆锥侧面所得曲线记为 C ,则曲线 C 所在双曲线的离心率

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{13}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

6. 下列关于统计概率知识的判断,正确的是

A. 将总体划分为 2 层,通过分层随机抽样,得到两层的样本平均数和样本方差分别为 \bar{x}_1, \bar{x}_2 和 s_1^2, s_2^2 ,且已知 $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$,则总体方差 $s^2 = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2)$

B. 在研究成对数据的相关关系时,相关关系越强,相关系数 r 越接近于 1

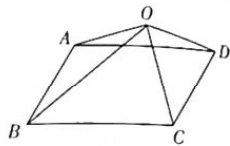
C. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$,若 $P(X \geq -1) + P(X \geq 5) = 1$,则 $\mu = 2$

D. 按从小到大顺序排列的两组数据:甲组:27,30,37, m ,40,50;乙组:24, n ,33,44,48,52,若这两组数据的第 30 百分位数、第 50 百分位数都分别对应相等,则 $m+n=67$

7. 如图, O 是平行四边形 $ABCD$ 所在平面内的一点,且满足 $\angle AOB =$

$$\frac{1}{2} \angle BOC = \frac{\pi}{6}, 2\sqrt{3} |\vec{OA}| = 2 |\vec{OB}| = 3 |\vec{OC}| = 6, \text{ 则 } |\vec{OD}| =$$

- A. 2 B. $\sqrt{3}$
C. $\sqrt{2}$ D. 1



8. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$,且 $ab \neq 0$,对任意 $x > 0$ 均有 $(x-a-b)(x-b)(\ln x - a) \geq 0$,则

- A. $a < 0, b < 0$ B. $a < 0, b > 0$ C. $a > 0, b < 0$ D. $a > 0, b > 0$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) + f(x) = 0$,且 $y = f(2-x)$ 为偶函数,则下列说法一定正确的是

- A. 函数 $f(x)$ 的周期为 2 B. 函数 $f(x)$ 的图象关于 $(1, 0)$ 对称
C. 函数 $f(x)$ 为偶函数 D. 函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=3$ 对称

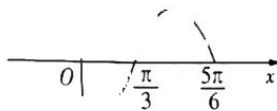
10. 已知 A, B 为圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 上的两点, P 为直线 $l: x + y - 2 = 0$ 上一动点,则

- A. 直线 l 与圆 O 相离
B. 当 A, B 为两定点时,满足 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ 的点 P 最多有 2 个
C. 当 $|AB| = \sqrt{3}$ 时, $|\vec{PA} + \vec{PB}|$ 的最大值是 $2\sqrt{2} + 1$
D. 当 PA, PB 为圆 O 的两条切线时,直线 AB 过定点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

11. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < 2\pi$) 的部分图象如图所示,则

A. $\varphi = \frac{4\pi}{3}$

B. $f(x)$ 在区间 $[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增

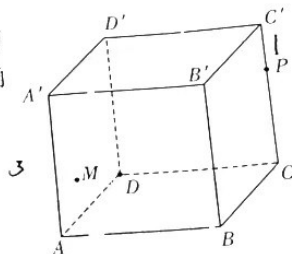




C. 将函数 $y = \cos x$ 图象上各点横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 再将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 可得函数 $f(x)$ 的图象

D. 函数 $y = 4f(x) + \sqrt{2x + \frac{\pi}{3}}$ 的零点个数为 7

12. 如图, 正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 3, 点 M 是侧面 $ADD'A'$ 上的一个动点 (含边界), 点 P 在棱 CC' 上, 且 $|PC'| = 1$, 则下列结论正确的有



A. 沿正方体的表面从点 A 到点 P 的最短路程为 $2\sqrt{10}$

B. 保持 PM 与 BD' 垂直时, 点 M 的运动轨迹长度为 $2\sqrt{2}$

C. 若保持 $|PM| = \sqrt{13}$, 则点 M 的运动轨迹长度为 $\frac{4}{3}\pi$

D. 当 M 在 D' 点时, 三棱锥 $B'-MAP$ 的外接球表面积为 $\frac{99}{4}\pi$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $(x - \frac{1}{x^2})^n$ 的展开式中第 3 项与第 8 项的二项式系数相等, 则展开式中的常数项为

14. 对于一个给定的数列 $\{a_n\}$, 把它的连续两项 a_{n+1} 与 a_n 的差 $a_{n+1} - a_n$ 记为 b_n , 得到一个新数列 $\{b_n\}$, 把数列 $\{b_n\}$ 称为原数列 $\{a_n\}$ 的一阶差数列. 若数列 $\{b_n\}$ 为原数列 $\{a_n\}$ 的一阶差数列, 数列 $\{c_n\}$ 为原数列 $\{b_n\}$ 的一阶差数列, 则称数列 $\{c_n\}$ 为原数列 $\{a_n\}$ 的二阶差数列. 已知数列 $\{a_n\}$ 的二阶差数列是等比数列, 且 $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 13$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ _____

15. 已知直线 $l: y = -1$, 抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点为 F , 过点 F 的直线交抛物线 C 于 A, B 两点, 点 B 关于 y 轴对称的点为 P . 若过点 A, B 的圆与直线 l 相切, 且与直线 PB 交于点 Q , 则当 $QB = 3PQ$ 时, 直线 AB 的斜率为 _____

16. 已知不等式 $e^x \geq a \ln \frac{a(x-1)}{e}$ ($a > 0$) 恒成立, 则实数 a 的最大值为 _____

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

7. (本小题满分 10 分)

已知 a, b, c 分别为三角形 ABC 三个内角 A, B, C 的对边, 且有 $2\sin(C + \frac{\pi}{6}) = \frac{b+c}{a}$.

(1) 求角 A ;

(2) 若 D 为边 BC 上一点, 且 $2CD = AD = BD$, 求 $\sin C$.

18. (本小题满分 12 分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1=1, \frac{S_n}{a_{n+1}} - \frac{S_n}{a_n} = -\frac{1}{2}$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

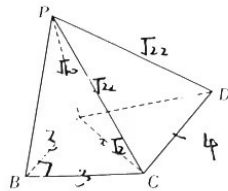
(2) 令 $b_n=2^n$, 记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 试求 T_{2n-1} 除以 3 的余数.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AB \parallel CD, AB \perp BC, AB=BC=3, CD=4, PC=PD=\sqrt{22}, PA=\sqrt{10}$.

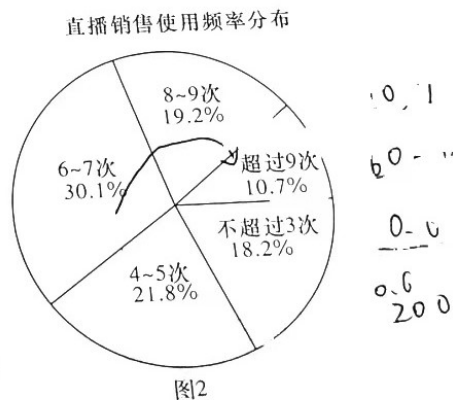
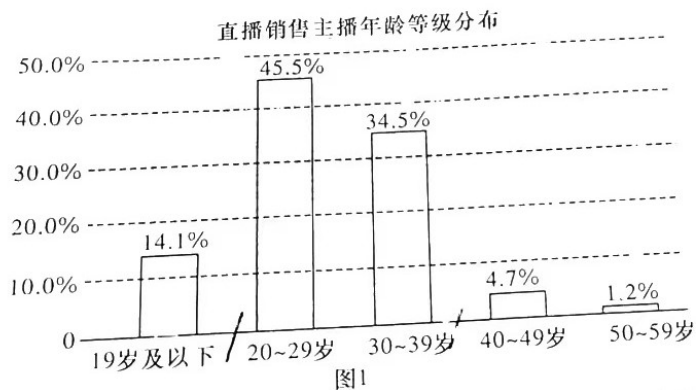
(1) 证明: 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求平面 PAC 与平面 PCD 所成锐二面角的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

直播带货是扶贫助农的一种新模式, 这种模式是利用主流媒体的公信力, 聚合销售主播的力量助力打通农产品产销链条, 切实助力贫困地区农民脱贫增收. 某贫困地区有统计数据显示, 2022 年该地利用网络直播形式销售农产品的销售主播年龄等级分布如图 1 所示, 一周内使用直播销售的频率分布扇形图如图 2 所示. 若将销售主播按照年龄分为“年轻人”(20 岁~39 岁)和“非年轻人”(19 岁及以下或者 40 岁及以上)两类, 将一周内使用的次数为 6 次或 6 次以上的称为“经常使用直播销售用户”, 使用次数为 5 次或不足 5 次的称为“不常使用直播销售用户”, 且“经常使用直播销售用户”中有 $\frac{5}{6}$ 是“年轻人”.



(1) 现对该地相关居民进行“经常使用网络直播销售与年龄关系”的调查, 采用随机抽样的方法, 抽取一个容量为 200 的样本, 请你根据图表中的数据, 完成 2×2 列联表, 根据 $\alpha=0.10$ 的独立性检验, 能否认为经常使用网络直播销售与年龄有关?

使用直播销售情况与年龄列联表

	年轻人	非年轻人	合计
经常使用直播销售用户	100	0	100
不常使用直播销售用户			
合计			200

数学试题 第 4 页(共 5 页)

(2)某投资公司在 2023 年年初准备将 1000 万元投资到“销售该地区农产品”的项目上,现有两种销售方案供选择:

方案一:线下销售. 根据市场调研,利用传统的线下销售,到年底可能获利 30%,可能亏损 15%,也可能不赔不赚,且这三种情况发生的概率分别为 $\frac{7}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$;

方案二:线上直播销售. 根据市场调研,利用线上直播销售,到年底可能获利 50%,可能亏损 30%,也可能不赔不赚,且这三种情况发生的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}$.

针对以上两种销售方案,请你从期望和方差的角度为投资公司选择一个合理的方案,并说明理由.

参考数据:独立性检验临界值表

α	0.15	0.10	0.050	0.025	0.010
x_{α}	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

其中, $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n=a+b+c+d$.

21. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,已知椭圆 $W: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,椭圆 W 上的点与点 $P(0, 2)$ 的距离的最大值为 4.

(1)求椭圆 W 的标准方程;

(2)点 B 在直线 $x=4$ 上,点 B 关于 x 轴的对称点为 B_1 ,直线 PB, PB_1 分别交椭圆 W 于 C, D 两点(不同于 P 点). 求证:直线 CD 过定点.

22. (本小题满分 12 分)

已知 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - a \ln(x-a)$, $a \in \mathbf{R}$.

(1)判断函数 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 x_1, x_2 是函数 $g(x) = f(x+a) - a(x + \frac{1}{2}a - 1)$ 的两个极值点,且 $x_1 < x_2$, 求证: $0 <$

$$f(x_1) - f(x_2) < \frac{1}{2}.$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线