2020～2021学年高三11月质量检测

理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：集合、常用逻辑用语、函数、导数、三角函数、三角恒等变换、解三角形、平面向量、数列、不等式、立体几何。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集为$\mathbf{R}$，集合$A=\{x|x<3,x\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x|(x-1)(x-4)>0\}$，则$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$

A. $\{1,2\}$　　B. $[1,3)$　　C. $(-\infty,1)$　　D. $\{0,1,2\}$

2. “$x>-3$”是“$2^x>\frac{1}{8}$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 在流行病学中，基本传染数R_0是指在没有外力介入，同时所有人都没有免疫力的情况下，一个感染者平均传染的人数. 初始感染者传染R_0个人，为第一轮传染，这R_0个人中每人再传染R_0个人，为第二轮传染，…….R_0一般由疾病的感染周期、感染者与其他人的接触频率、每次接触过程中传染的概率决定. 假设新冠肺炎的基本传染数$R_0=3.8$，平均感染周期为7天，设某一轮新增加的感染人数为M，则当$M>1\ 000$时需要的天数至少为

A. 34　　B. 35　　C. 36　　D. 37

参考数据：$\lg 38\approx1.58$

4. 已知直线AB是平面α的斜线，则下列结论成立的是

A. α内的所有直线都与直线AB异面　　B. α内的任意一条直线都与直线AB垂直

C. 过直线AB存在一个平面与α垂直　　D. 过直线AB存在一个平面与α平行

5. 在长方形$ABCD$中，$AB=2AD$，过AD，BC分别作异于平面$ABCD$的平面α，β，若$\alpha\cap\beta=l$，则l与BD所成角的正切值是

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 4

6. 已知正数x，y满足$x(y-1)=2$，则$2x+y$的最小值为

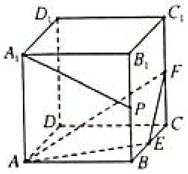
A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 8

7. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数，且当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=xe^x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为

A. $y=2ex-e$　　B. $y=-2ex+e$

C. $y=2ex+e$　　D. $y=-2ex-e$

8. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E,F,P 分别是棱 BC,CC_1,BB_1 的中点，点 A_1，P 到平面 AEF 的距离分别为 h_1,h_2，则



A. $h_1=h_2$　　B. $h_1=\frac{\sqrt{3}}{2}h_2$

C. $h_1=\frac{\sqrt{2}}{2}h_2$　　D. $h_1=2h_2$

9. 在一次气象调查中，发现某城市的温度 y(单位：℃)的波动近似地遵循规律 $y=25+6\sin\frac{\pi}{12}t$，其中 t(单位：h)是从某日 9:00 开始计算(即 9:00 时，$t=0$)，且 $t\leqslant24$. 现给出下列结论：

①15:00 时，出现最高温度，且最高温度为 31 ℃；

②凌晨 3:00 时，出现最低温度，且最低温度为 19 ℃；

③温度为 28 ℃时的时刻为 11:00；

④温度为 22 ℃时的时刻为凌晨 7:00.

其中正确的所有序号是

A. ①　　B. ①②　　C. ①②③　　D. ①②③④

10. 已知定义在 R 上的函数 $y=f(x)$ 满足 $f(10-x)=f(x)$，$(x-5)f'(x)>0(x\neq5)$，若 $f(-1)f(1)<0$，则函数 $f(x)$ 在区间 $(9,11)$ 内

A. 没有零点　　B. 有且仅有 1 个零点

C. 至少有 2 个零点　　D. 可能有无数个零点

11. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有顶点都在球 O 的表面上，侧棱 $AA_1\perp$ 底面 $A_1B_1C_1$，底面 $\triangle A_1B_1C_1$ 是正三角形，AB_1 与底面 $A_1B_1C_1$ 所成的角是 45°. 若三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积是 $2\sqrt{3}$，则球 O 的表面积是

A. $\frac{28\pi}{3}$　　B. $\frac{14\pi}{3}$　　C. $\frac{56\pi}{3}$　　D. $\frac{7\pi}{3}$

12. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=n^2$. 定义数列 $\{b_m\}$ 如下：$\frac{m+1}{m}b_m(m\in\mathbf{N}^*)$ 是使不等式 $a_n\geqslant m(m\in\mathbf{N}^*)$ 成立的所有 n 中的最小值，则 $b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{19}=$

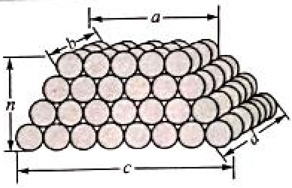
A. 25　　B. 50　　C. 75　　D. 100

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}x-y+1\geqslant0,\\x+y-1\geqslant0,\\x\leqslant1,\end{cases}$ 则 $x+y$ 的最大值为________.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=4$，$\angle ABC=45°$，AD 是边 BC 上的高，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$________.

15. 北宋的数学家沈括博学多才，善于观察. 据说有一天，他走进一家酒馆，看见一层层垒起的酒坛，不禁想到："怎么求这些酒坛的总数呢？"他想堆积的酒坛、棋子等虽然看起来像实体，但中间是有空隙的，应该把它们看成离散的量. 经过反复尝试，沈括提出对于上底有 ab 个，下底有 cd 个，共 n 层的堆积物(如图)，可以用公式 $S=\frac{n}{6}[(2b+d)a+(b+2d)c]+\frac{n}{6}(c-a)$ 求出物体的总数. 这就是沈括的"隙积术". 利用"隙积术"求得数列 $\{(n+1)\times(n+2)\}$ 的前 n 项和是________.



16. 若函数 $y=\ln\frac{x}{2-x}-a(x-1)$ 有 3 个零点，则实数 a 的取值范围是________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in[0,\pi]$，向量 $\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},-1)$.

(1)若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求 θ 的值；

(2)若 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<m$ 对任意 $\theta\in[0,\pi]$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

在等差数列 $\{a_n\}$ 中，其前 n 项和为 S_n，且 $a_3=3$，$S_{10}=55$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

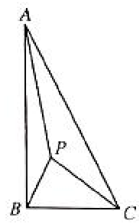
(2)设 $b_n=\frac{a_n}{2^n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，$\angle ACB=\frac{\pi}{3}$，$BC=2$. P 是 $\triangle ABC$ 内一点，且 $\angle BPC=\frac{\pi}{2}$.

(1)若 $\angle ABP=\frac{\pi}{6}$，求线段 AP 的长度；

(2)若 $\angle APB=\frac{2\pi}{3}$，设 $\angle PBA=\alpha$，求 $\sin\alpha$.

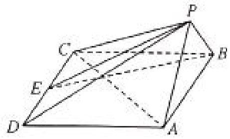


20.（本小题满分12分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为正方形，平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$，$\triangle PAB$ 为等腰直角三角形，$PA\perp PB$，$AB=2$.

(1)求证：平面 $PBC\perp$平面 PAC；

(2)设 E 为 CD 的中点，求二面角 $C-PB-E$ 的余弦值.



21.（本小题满分12分）

在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=4$，$3a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$.

(1)求证：数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是等比数列；

(2)若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n\geqslant m^2-2m$ 对任意正整数 n 恒成立，求实数 m 的取值范围.

22.（本小题满分12分）

(1)当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，求证：$x\geqslant\sin x$；

(2)若 $e^x\geqslant kx+1$ 对于任意的 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，求实数 k 的取值范围；

(3)设 $a>0$，求证：函数 $f(x)=e^{ax-1}\cdot\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上存在唯一的极大值点 x_0，且 $f(x_0)>e^{-\frac{1}{a}}$.

2020～2021 学年高三 11 月质量检测·理科数学

参考答案、提示及评分细则

1. A　因为 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{x|x<1$ 或 $x>4\}$，所以 $\complement_R B=\{x|1\leqslant x\leqslant 4\}$，从而 $A\cap(\complement_R B)=\{1,2\}$. 故选 A.

2. C　当 $x>-3$ 时，$2^x>\frac{1}{8}$；当 $2^x>\frac{1}{8}$ 时，$x>-3$，所以"$x>-3$"是"$2^x>\frac{1}{8}$"的充要条件. 故选 C.

3. D　设第 n 轮感染人数为 a_n，则数列$\{a_n\}$为等比数列，其中 $a_1=3.8$，公比为 $R=3.8$，所以 $a_n=3.8^n>1\ 000$，解得 $n>\log_{3.8}1\ 000=\frac{3}{\lg 3.8}=\frac{3}{\lg 38-1}\approx\frac{3}{0.58}\approx 5.17$，而每轮感染周期为 7 天，所以需要的天数至少为 $5.17\times 7=36.19$. 故选 D.

4. C　在 α 内过斜足的直线与直线 AB 相交，则 A 错误；α 内有无数条直线与直线 AB 垂直，这无数条直线都与斜线 AB 在 α 内的射影垂直，而"无数"不等价于"任意"，则 B 错误；斜线 AB 与它在 α 内的射影构成一个平面，该平面与 α 垂直，则 C 正确；由于斜线 AB 与 α 相交，过斜线 AB 的平面一定与 α 相交，则 D 错误，故选 C.

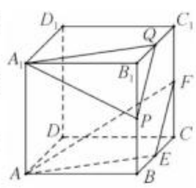
5. C　由 $AD/\!/BC$ 及线面平行的判定定理，得 $AD/\!/\beta$，再由线面平行的性质定理，得 $AD/\!/l$，所以 l 与 BD 所成角是 $\angle ADB$，从而 $\tan\angle ADB=2$. 故选 C.

6. B　由题意，得 $x>0$，$y>1$. 法一：$2x+y=2x+(y-1)+1\geqslant 2\sqrt{2x(y-1)}+1=5$，当且仅当 $2x=y-1$，即 $x=1$，$y=3$ 时，$2x+y$ 的最小值为 5. 故选 B. 法二：由 $x(y-1)=2$，得 $x=\frac{2}{y-1}$，则 $2x+y=\frac{4}{y-1}+(y-1)+1\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{y-1}\cdot(y-1)}+1=5$，当且仅当 $2x=y-1$，即 $x=1$，$y=3$ 时，$2x+y$ 的最小值为 5. 故选 B.

7. D　法一：当 $x\geqslant 0$ 时，$f'(x)=(x+1)e^x$，则 $f'(1)=2e$，$f(1)=e$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y-e=2e(x-1)$，即 $y=2ex-e$，根据对称性，可得曲线 $y=f(x)$ 在点$(-1,f(-1))$处的切线方程为 $y=-2ex-e$. 故选 D.

法二：当 $x<0$ 时，$-x>0$，所以 $f(-x)=-xe^{-x}$，又 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)=-xe^{-x}=-\frac{x}{e^x}$，所以 $f'(x)=\frac{x-1}{e^x}$，所以 $f'(-1)=-2e$，又 $f(-1)=e$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点$(-1,f(-1))$处的切线方程为 $y-e=-2e(x+1)$，即 $y=-2ex-e$. 故选 D.

8. A　如图，取 B_1C_1 的中点 Q，连接 A_1Q，PQ，易证 $PQ/\!/EF$，又因为 $EF\subset$平面 AEF，$PQ\not\subset$平面 AEF，所以 $PQ/\!/$平面 AEF，同理可证 $A_1Q/\!/$平面 AEF. 因为 A_1Q，$PQ\subset$平面 A_1PQ，且 $A_1Q\cap PQ=Q$，所以平面 $A_1PQ/\!/$平面 AEF. 又 $A_1P\subset$平面 A_1PQ，所以 $A_1P/\!/$平面 AEF，所以 $h_1=h_2$，故选 A.



9. B　当 $\frac{\pi}{12}t=\frac{\pi}{2}$，即 $t=6$，即 15:00 时，$y_{max}=31$(℃)，则①正确；当 $\frac{\pi}{12}t=\frac{3\pi}{2}$，即 $t=18$，即凌晨 3:00 时，$y_{min}=19$(℃)，则②正确；由 $25+6\sin\frac{\pi}{12}t=28$，得 $\sin\frac{\pi}{12}t=\frac{1}{2}$，则 $\frac{\pi}{12}t=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{12}t=\frac{5\pi}{6}$，解得 $t=2$ 或 $t=10$，即对应的时刻为 11:00 和 19:00；

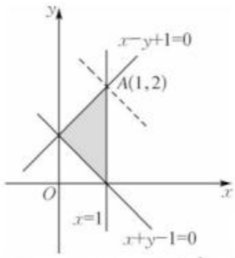
则③错误；同理④也错误. 故选 B.

10. B　因为函数 $y=f(x)$ 满足 $f(10-x)=f(x)$，所以函数 $y=f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x=5$. 又因为 $(x-5)f'(x)>0$，所以当 $x<5$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>5$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,5)$ 上单调递减；在 $(5,+\infty)$ 上单调递增. 又 $f(-1)f(1)<0$，且由对称性得，$f(-1)=f(11)$，$f(1)=f(9)$，则 $f(9)f(11)<0$. 又函数 $f(x)$ 在区间 $(9,11)$ 上单调递增，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(9,11)$ 内有且仅有 1 个零点. 故选 B.

11. A　易知 $\angle AB_1A_1$ 是 AB_1 与底面 $A_1B_1C_1$ 所成的角，则 $\angle AB_1A_1=45°$，故由 $\tan\angle AB_1A_1=\tan 45°=\frac{AA_1}{A_1B_1}=1$，得 $AA_1=A_1B_1$. 设 $AA_1=A_1B_1=a$，则 $V_{三棱柱ABC-A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}a}{2}\times a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^3=2\sqrt{3}$，解得 $a=2$. 所以球 O 的半径 $R=\sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2+\left(2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{7}{3}}$，所以球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2=\frac{28\pi}{3}$. 故选 A.

12. B　由 $S_n=n^2$，可得 $a_n=2n-1$. 由 $a_n\geqslant m$，得 $2n-1\geqslant m$，解得 $n\geqslant\frac{m+1}{2}$. 当 $m=2k-1$，$(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$\frac{m+1}{m}b_m=k$，即 $b_m=\frac{mk}{m+1}=\frac{m(m+1)}{2(m+1)}=\frac{m}{2}$，即 $b_{2k-1}=\frac{2k-1}{2}$，从而 $b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{19}=\frac{1}{2}(1+3+5+\cdots+19)=50$. 故选 B.

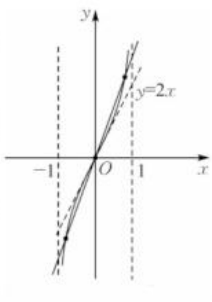
13. 3　画出可行域，设 $z=x+y$，则 $y=-x+z$，当直线 $y=-x+z$ 过点 $(1,2)$ 时，z 最大，且 $z_{\max}=3$.



14. 8　法一：过 D 作 $DH\perp AC$ 于点 H，根据数量积的几何意义，得 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=AH\cdot AC$，根据射影定理，得 $AD^2=AH\cdot AC$；在直角三角形 ABD 中，$AD=2\sqrt{2}$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=AH\cdot AC=AD^2=8$. 法二：由 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}|\cos 45°=2\sqrt{2}$，得 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\angle DAC=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AD}|^2=8$.

15. $\frac{n}{3}(n^2+6n+11)$　在数列 $2\times3,3\times4,4\times5,\cdots,(n+1)\times(n+2)$ 中，$a=2$，$b=3$，项数为 n，$c=n+1$，$d=n+2$，则 $S=\frac{n}{6}[(6+n+2)\times2+(3+2n+4)(n+1)]+\frac{n}{6}(n-1)=\frac{n}{3}(n^2+6n+11)$.

16. $(2,+\infty)$　将 $y=\ln\frac{x}{2-x}-a(x-1)$ 的图象向左平移 1 个单位，得到函数 $y=\ln\frac{1+x}{1-x}-ax$ 的图象，即研究直线 $y=ax$ 与函数 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ 的图象交点的个数，而函数 $f(x)$ 在定义域 $(-1,1)$ 上为奇函数；又 $f'(x)=\frac{1-x}{1+x}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{2}{1-x^2}>0$，所以曲线 $y=f(x)$ 在定义域 $(-1,1)$ 上单调递增，且在 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=2x$. 如图，当 $0<x<1$ 时，



$\ln\frac{1+x}{1-x}>2x$；当$-1<x<0$时，$\ln\frac{1+x}{1-x}<2x$. 综上，实数 a 的取值范围是$(2,+\infty)$.

17. 解：(1)由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，得$\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=0$，

解得 $\tan\theta=\sqrt{3}$. ………………………………………………………… 2 分

又 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………… 4 分

(2)因为 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2\cos\theta-\sqrt{3},2\sin\theta+1)$， ………………………………… 6 分

所以 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2\cos\theta-\sqrt{3})^2+(2\sin\theta+1)^2}$

$=\sqrt{8+4\sin\theta-4\sqrt{3}\cos\theta}=\sqrt{8+8\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}$. ………………………… 8 分

由 $\theta\in[0,\pi]$，得 $\theta-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$.

所以当 $\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$时，即$\theta=\frac{5\pi}{6}$时，$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|_{\max}=4$. ………………………… 9 分

由 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<m$ 恒成立，得 $m>4$，

所以实数 m 的取值范围$(4,+\infty)$. ………………………………………………… 10 分

18. 解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，由题意，得$\begin{cases}a_1+2d=3,\\10a_1+\frac{10(10-1)}{2}d=55,\end{cases}$ ………………………… 4 分

解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=1,\end{cases}$ ………………………………………………………… 5 分

所以数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=n$. ………………………………………………… 6 分

(2)由(1)知 $b_n=\frac{n}{2^n}$ ………………………………………………………… 7 分

则 $T_n=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$， ①

①式两边同乘以$\frac{1}{2}$，得$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$， ② ………………………… 9 分

①−②，得$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$， ………………… 11 分

所以 $T_n=2-\frac{n+2}{2^n}$. ………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)因为$\angle PBC=\frac{\pi}{3}$，所以在 Rt$\triangle PBC$ 中，$\angle BPC=\frac{\pi}{2}$，$BC=2$，$\angle PCB=\frac{\pi}{6}$，所以 $PB=1$. ………………… 3 分

在$\triangle APB$ 中，$\angle ABP=\frac{\pi}{6}$，$BP=1$，$AB=2\sqrt{3}$，

由余弦定理，得 $AP^2=AB^2+BP^2-2AB\cdot BP\cdot\cos\angle PBA=12+1-2\times1\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7$，

所以 $AP=\sqrt{7}$. ……………………………………………………………………………… 6 分

(2)由 $\angle PBA=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，得 $\angle PCB=\alpha$，

在 $Rt\triangle PBC$ 中，$\angle BPC=\frac{\pi}{2}$，$BC=2$，$\angle PCB=\alpha$，所以 $PB=2\sin\alpha$， ……………………………… 8 分

在 $\triangle APB$ 中，$\angle ABP=\alpha$，$BP=2\sin\alpha$，$AB=2\sqrt{3}$，$\angle APB=\frac{2\pi}{3}$，

由正弦定理得 $\frac{2\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}$，………………………………………………………… 10 分

所以 $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha$，又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $\sin^2\alpha=\frac{3}{7}$，

由 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{21}}{7}$. ……………………………………………………………… 12 分

20. (1)证明：因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，

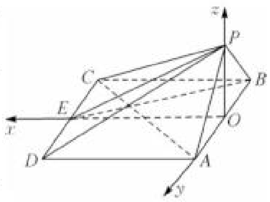
$BC\subset$ 平面 $ABCD$ 且 $BC\perp AB$，

所以 $BC\perp$ 平面 PAB. ……………………………………………………… 2 分

又 $PA\subset$ 平面 PAB，所以 $BC\perp PA$. ………………………………………… 3 分

因为 $PA\perp PB$，$PB\cap BC=B$，PB，$BC\subset$ 平面 PBC，

所以 $PA\perp$ 平面 PBC. ……………………………………………………… 4 分



又 $PA\subset$ 平面 PAC，所以平面 $PBC\perp$ 平面 PAC. ……………………………………………… 5 分

(2)解：取 AB 的中点 O，连接 OE，OP，则 $PO\perp AB$，$OE\perp AB$.

因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，

$PO\subset$ 平面 PAB，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PO\perp OE$. ……………………………………… 6 分

以 O 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OP}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立如图所示空间直角坐标系 $O-xyz$，则

$O(0,0,0)$，$A(0,1,0)$，$B(0,-1,0)$，$P(0,0,1)$，$E(2,0,0)$，则 $\overrightarrow{PA}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{PB}=(0,-1,-1)$，$\overrightarrow{BE}=(2,1,0)$.

……………………………………………………………………………………………… 7 分

设平面 PBE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-y-z=0,\\ 2x+y=0,\end{cases}$

取 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,-2,2)$； ……………………………………………………………… 9 分

平面 PBC 的一个法向量为 $\overrightarrow{PA}=(0,1,-1)$， ………………………………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\overrightarrow{PA},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{PA}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-4}{\sqrt{2}\times\sqrt{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

因为二面角 $C-PB-E$ 为锐二面角，

所以二面角 $C-PB-E$ 的余弦值为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ………………………………………… 12 分

21. (1)证明：由 $3a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$，得 $a_{n+2}=\frac{4}{3}a_{n+1}-\frac{1}{3}a_n$. ………………………… 1 分

则$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=\frac{\frac{4}{3}a_{n+1}-\frac{1}{3}a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=\frac{\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)}{a_{n+1}-a_n}=\frac{1}{3}$. ………………………… 3 分

所以数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是以$a_2-a_1=3$为首项，$\frac{1}{3}$为公比的等比数列. ………………………… 4 分

(2)解：由(1)得 $a_{n+1}-a_n=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3^{n-2}}$. ………………………… 5 分

当 $n\geqslant2$ 时，

$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$

$=1+3+\frac{1}{3^0}+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-3}}$

$=4+\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{11}{2}-\frac{9}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. ………………………… 8 分

当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 适合 $a_n=\frac{11}{2}-\frac{9}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

所以 $a_n=\frac{11}{2}-\frac{9}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. ………………………… 9 分

所以 $S_n=\frac{11}{2}n-\frac{9}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{11}{2}n-\frac{27}{4}$. ………………………… 10 分

法一：因为 $a_n=\frac{11}{2}-\frac{9}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$是关于 n 的递增数列，且 $a_1=1>0$，

所以 S_n 也关于 n 单调递增，从而 S_n 的最小值为 $S_1=1$. ………………………… 11 分

法二：因为 $S_{n+1}-S_n=\left[\frac{27}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+\frac{11}{2}(n+1)-\frac{27}{4}\right]-\left[\frac{27}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{11}{2}n-\frac{27}{4}\right]=-\frac{9}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{11}{2}$,

所以 S_n 关于 n 单调递增，从而 S_n 的最小值为 $S_1=1$. ………………………… 11 分

因为 $S_n\geqslant m^2-2m$ 恒成立，所以 $1\geqslant m^2-2m$，解得 $1-\sqrt{2}\leqslant m\leqslant1+\sqrt{2}$.

即实数 m 的取值范围是$[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$. ………………………… 12 分

22. (1)证明：设 $G(x)=x-\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则 $G'(x)=1-\cos x\geqslant0$, ………………………… 1 分

从而 $G(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 为增函数，所以 $G(x)\geqslant G(0)=0$，

故当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$x\geqslant\sin x$ 成立. …………………………………………………………………… 3 分

(2)解：设 $g(x)=e^x-kx-1$，则 $g'(x)=e^x-k$， ………………………………………………………… 4 分

考虑到当 $x\geqslant0$ 时，$e^x\geqslant1$，

(ⅰ)当 $k\leqslant1$ 时，$g'(x)\geqslant0$，则 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，

从而 $g(x)\geqslant g(0)=0$，此时适合题意. …………………………………………………………………… 5 分

(ⅱ)当 $k>1$ 时，$g'(x)=e^x-e^{\ln k}$，则当 $0<x<\ln k$ 时，$g'(x)<0$，从而 $g(x)$ 在 $(0,\ln k)$ 上是减函数，

所以当 $0<x<\ln k$ 时，$g(x)<g(0)=0$，这与"当 $x\geqslant0$ 时，$g(x)\geqslant0$ 恒成立"矛盾，故此时不适合题意. …………… 6 分

由(ⅰ)(ⅱ)得所求实数 k 的取值范围为 $(-\infty,1]$. ………………………………………………………… 7 分

(3)证明：$f'(x)=ae^{ax-1}\cdot\cos x-e^{ax-1}\cdot\sin x=e^{ax-1}(a\cos x-\sin x)$， ……………………………… 8 分

令 $f'(x)=0$，得 $a\cos x-\sin x=0$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，可化为 $\tan x=a$，

由正切函数的性质及 $a>0$，得在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内必存在唯一的实数 x_0，使得 $\tan x_0=a$， ……………………………… 9 分

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上为增函数；

当 $x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上为减函数，

所以 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，且 $f(x)$ 的极大值为 $f(x_0)=e^{ax_0-1}\cdot\cos x_0$. ……………………………… 10 分

下面证明：$f(x_0)>e^{-\frac{1}{a}}$.

当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，由(1)知 $x\geqslant\sin x$，由(2)易证 $e^{x-1}\geqslant x$.

所以 $e^{ax_0-1}\geqslant ax_0\geqslant a\sin x_0$，从而 $f(x_0)=e^{ax_0-1}\cdot\cos x_0\geqslant a\sin x_0\cos x_0=\frac{a^2}{1+a^2}$. ……………………………… 11 分

下面证明：$\frac{a^2}{1+a^2}>e^{-\frac{1}{a}}$. 令 $t=-\frac{1}{a}$，则 $t<0$，

即证 $\frac{1}{1+t^2}>e^t(t<0)$，即证 $(1+t^2)e^t-1<0(t<0)$，

令 $\varphi(t)=(1+t^2)e^t-1(t<0)$，则 $\varphi'(t)=(1+t)^2e^t\geqslant0$，

从而 $\varphi(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为增函数，

所以当 $t<0$ 时，$\varphi(t)<\varphi(0)=0$，即 $(1+t^2)e^t-1<0(t<0)$，

故 $f(x_0)>e^{-\frac{1}{a}}$ 成立. ………………………………………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》