

2017 级高三上学期期中考试

数学试题

一、单选题：本大题共 10 个小题，每小题 4 分；共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $\frac{1}{1-i}$ 的共轭复数为

- A. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ B. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ C. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ D. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

2. 已知全集 $U = \mathbb{R}$ ，集合 $A = \{x \mid y = \lg x\}$ ，集合 $B = \{y \mid y = \sqrt{x+1}\}$ ，那么 $A \cap (C_U B) =$

- A. \emptyset B. $(0, 1]$ C. $(0, 1)$ D. $(1, +\infty)$

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1, a_3 + a_5 = 6$ ，则 $a_5 + a_7 =$

- A. 12 B. 10 C. $12\sqrt{2}$ D. $6\sqrt{2}$

4. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ 。若点 D 满足 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$ ，则 $\overrightarrow{AD} =$

- A. $\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ B. $\frac{5}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{b}$ C. $\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$ D. $\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$

5. 已知函数 $f(x)$ 满足：① 对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $x_1 \neq x_2$ ，都有

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0; \text{ ② 对定义域内任意 } x, \text{ 都有 } f(x) = f(-x) \text{ 则符合上述条件的函数是}$$

- A. $f(x) = \cos x$ B. $f(x) = \frac{1}{x} - x$
C. $f(x) = \ln|x+1|$ D. $f(x) = x^2 + |x| + 1$

6. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列， S_n 为其前 n 项和，若 $a_3 + 7 = 2a_5$ ，则 $S_{13} =$

- A. 49 B. 91 C. 98 D. 182

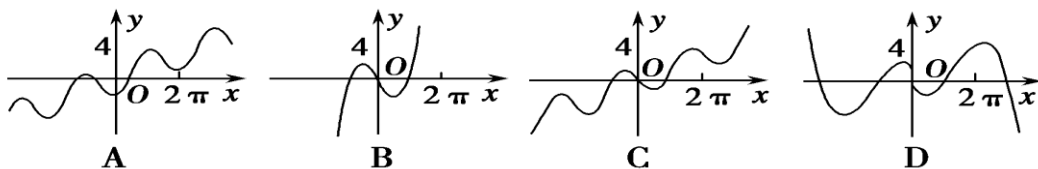
7. 已知函数 $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ，要得到 $g(x) = \cos x$ 的图象，只需将函数 $y = f(x)$ 的图象

- A. 向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位 B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位
C. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位 D. 向左平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位

8. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 5\sqrt{2}$, 则 $|\vec{b}| =$

- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{10}$ C. 5 D. 25

9. 函数 $y = \frac{x}{2} - 2\sin x$ 的图象大致是



10. 已知函数 $f(x) = 2|x| - x^2$, $g(x) = \frac{e^x}{x+2}$ (其中 e 为自然对数的底数), 若函数

$h(x) = f[g(x)] - k$ 有 4 个零点, 则 k 的取值范围为

- A. $(0, 1)$ B. $(0, \frac{2}{e} - \frac{1}{e^2})$ C. $(\frac{2}{e} - \frac{1}{e^2}, 1)$ D. $(\frac{2}{e} - \frac{1}{e^2}, 1]$

二、多选题: 本大题共 3 个小题. 每小题 4 分, 漏选得 3 分, 错选不得分, 共 12 分

11. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 为其前 n 项和, 且 $S_7 < S_8$, $S_8 = S_9 > S_{10}$, 则下列结论正确的是

- A. $d < 0$ B. $a_9 = 0$ C. $S_{11} > S_7$ D. S_8, S_9 均为 S_n 的最大值

12. 下列命题正确的是:

A. 函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x$ 的图像关于坐标原点对称,

B. 若 $x \in (e^{-1}, 1)$, $a = \ln x$, $b = 2\ln x$, $c = \ln^3 x$, 则 $b < a < c$,

C. 如果函数 $y = 3\cos(2x + \phi)$ 的图像关于点 $(\frac{4\pi}{3}, 0)$ 中心对称, 那么 $|\phi|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$

D. 设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是任意的非零平面向量, 且相互不共线, 则 $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b}$ 不与 \vec{c} 垂直

13. 对于函数 $f(x) = 16\ln(1+x) + x^2 - 10x$, 下列正确的是:

A. $x = 3$ 是函数 $f(x)$ 的一个极值点

B. $f(x)$ 的单调增区间是 $(-1, 1), (2, +\infty)$

C. $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上的单调递减

D. 直线 $y=16\ln 3-16$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有 3 个交点

三、填空题：本大题共 4 个小题. 每小题 4 分;共 16 分

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} 2^x+1, & x \leq 1 \\ \log_3(x+1), & x > 1 \end{cases}$, 则 $f[f(2)]=$ _____

15. 设 i 是虚数单位, 复数 $\frac{a-i}{1+i}$ ($a \in R$) 对应的点在直线 $y=x$ 上, 则 $a=$ _____

16. 已知 θ 是第四象限角, 且 $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{3}{5}$, 则 $\tan(\theta-\frac{\pi}{4})=$ _____

17. 设函数 $f(x)=\frac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $M+m=$ _____

四、解答题：本大题共 6 个小题, 共 82 分, 解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤。

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+b$ 的图像在点 $P(1,0)$ 处的切线与直线 $3x+y+2=0$ 平行.

(1) 求 a 、 b 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

19. (本小题满分 13 分) 已知函数 $f(x)=2\cos x \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $f(C)=1, \sin B=2\sin A$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 求 c 的值.

20. (本小题满分 13 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1=1$, $a_n \neq 0$, $a_n a_{n+1} = \lambda S_n - 1$, 其中 λ 为常数.

(I) 证明: $a_{n+2} - a_n = \lambda$;

(II) 是否存在 λ , 使得 $\{a_n\}$ 为等差数列? 并说明理由.

21. (本小题满分 14 分)

已知向量 $\vec{a} = (\cos \frac{3x}{2}, \sin \frac{3x}{2})$, $\vec{b} = (\cos \frac{x}{2}, -\sin \frac{x}{2})$, 且 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

(I) 用 $\cos x$ 表示 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 及 $|\vec{a} + \vec{b}|$;

(II) 求函数 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} + 2|\vec{a} + \vec{b}|$ 的最小值.

22. (本小题满分 14 分)

在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 0$, $a_2 = 6$, 且对于任意正整数 n 都有 $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$.

(1) 令 $b_n = a_{n+1} - 2a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

23. (本小题满分 16 分)

已知函数 $f(x) = -x^2 + 2\ln x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最大值;

(2) 若函数 $f(x)$ 与 $g(x) = x + \frac{a}{x}$ 有相同极值点,

① 求实数 a 的值;

② 若对于 $\forall x_1, x_2 \in [\frac{1}{e}, 3]$ (e 为自然对数的底数), 不等式 $\frac{f(x_1) - g(x_2)}{k-1} \leq 1$ 恒成立,

求实数 k 的取值范围.