

百校联考2020年高考考前冲刺必刷卷(一)

文科数学

参考答案

本试卷防伪处为:

若 A 中只有一个元素,则实数 a 的值为
若 q 是真命题,求实数 a 的取值范围;

1. B 【解析】 $B = \{x | 2 - x < 1\} = \{x | x > 1\}$, 所以
 $A \cap B = \{2, 4\}$.

2. D 【解析】因为 $f(x) = e^x - e^{-x}$, 则 $f(-x) = -(e^x - e^{-x}) = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是奇函数, $f(x) = e^x - e^{-x} = e^x - \frac{1}{e^x}$, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

3. D 【解析】由题意得 $\begin{cases} x-2 > 0 \\ \lg(x-2) \neq 0 \\ 16-x^2 \geq 0 \end{cases}$, 故所求函数的
定义域为 $(2, 3) \cup (3, 4]$.

4. A 【解析】令 $f(x) = x^2 - (x-1) = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$
 > 0 , 所以 p 为真命题; 当 $x_0 = 1$ 时, $\ln x_0 = x_0 - 1$,
故 q 为真命题. 所以 $p \wedge q$ 为真命题.

5. C 【解析】若 A 中只有一个元素, 则只有一个实数
满足 $x^2 + 2ax + 2a \leq 0$, 即抛物线 $y = x^2 + 2ax + 2a$
与 x 轴只有一个交点, $\therefore \Delta = 4a^2 - 8a = 0$. $\therefore a = 0$
或 2 .

6. A 【解析】由 $f(x)$ 的解析式知只有两个零点 $x = -\frac{4}{3}$
与 $x = 0$, 排除 B、D; 又 $f'(x) = (3x^2 + 10x + 4)e^x$, 由
 $f'(x) = 0$ 根的情况知函数有两个极值点, 排除 C.

7. C 【解析】 $f(x) = \log_2(4^x + 1) - x = \log_2(4^x + 1) - \log_2 2^x = \log_2 \frac{4^x + 1}{2^x}$, 令 $t = \frac{4^x + 1}{2^x}$ 则 $t = 2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2$,
所以 $\log_2 \frac{4^x + 1}{2^x} \geq \log_2 2 = 1$, 即函数 $f(x)$ 的最小值
为 1 .

8. D 【解析】 $a = 2020^{\frac{1}{2020}} > 1, 0 < b = (\frac{1}{2019})^{2020} < 1$,
 $c = \log_{2020} \frac{1}{2019} < 0$, 所以 $a > b > c$.

9. A 【解析】 p : 函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2ax - \ln x$ 存在
极值, 对函数 $f(x)$ 求导得 $f'(x) = -\frac{x^2 - 2ax + 1}{x}$.

百校联考2020年高考考前冲刺必刷卷-文数答案

因为 $f(x)$ 存在极值, 所以 $f'(x) = -\frac{x^2 - 2ax + 1}{x}$

在 $(0, +\infty)$ 上有解, 即方程 $x^2 - 2ax + 1 = 0$ 在
 $(0, +\infty)$ 上有解, 即 $\Delta = 4a^2 - 4 \geq 0$, 显然当 $\Delta = 0$
时, $f(x)$ 无极值, 不合题意, 所以方程 $x^2 - 2ax + 1$
 $= 0$ 必有两个不等正根, 所以 $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 4a^2 - 4 > 0 \end{cases}$, 解得
 $a > 1$. 函数 $g(x) = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数,
则 $a > 1$. 故 p 是 q 的充要条件.

10. C 【解析】 $\because f(1-x) = f(1+x)$, $\therefore f(x) =$
 $-x^2(x^2 + ax + b)$ 的图像关于直线 $x = 1$ 对称, 因
为 $x = 0$ 是 $f(x) = 0$ 的二重根, 所以 $x = 2$ 也是方
程 $f(x) = 0$ 的二重根, 则 $f(x) = -x^2(x-2)^2$, 所
以 $f(x) \leq 0$, 所以 $f(x)$ 的最大值是 0 .

11. C 【解析】当 $x > 0$ 时, $x \cdot f'(x) + f(x) > 0$, 令
 $F(x) = x \cdot f(x)$, 则 $F'(x) = x \cdot f'(x) + f(x) >$
 0 , 即当 $x > 0$ 时, $F(x)$ 单调递增.

又 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, $\therefore F(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函
数且 $F(0) = 0$, 则当 $x < 0$ 时, $F(x)$ 单调递增.

$f(1) = 2$, 所以 $F(1) = 2$, $\therefore F(-1) = -2$, 当 $x > 0$
时, 不等式 $f(x) < \frac{2}{|x|}$ 等价于 $x \cdot f(x) < 2$, 即

$F(x) < F(1)$, $\therefore 0 < x < 1$, 当 $x < 0$ 时, 不等式
 $f(x) < \frac{2}{|x|}$ 等价于 $x \cdot f(x) > -2$, 即 $F(x) >$

$F(-1)$, $\therefore -1 < x < 0$, 综上, 不等式 $f(x) < \frac{2}{|x|}$
的解集为 $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

12. D 【解析】 $f(x) = x(ax + 1 - e^x)$. 令 $g(x) = ax -$
 $e^x + 1$, 则 $g'(x) = a - e^x$.

若 $a \leq 1$, 则当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 为
减函数, 而 $g(0) = 0$,

从而当 $x \geq 0$ 时, $g(x) \leq 0$, 即 $f(x) \leq 0$,

若 $a > 1$, 则当 $x \in (0, \ln a)$ 时, $g'(x) > 0$,

$g(x)$ 为增函数, 而 $g(0) = 0$, 从而当 $x \in (0, \ln a)$ 时
 $g(x) > 0$, 即 $f(x) > 0$, 不合题意.

综上可得, a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

13. 5 【解析】 $a - 2 = 3$, 解得 $a = 5$; 当 $a = 3$ 时, $a - 2 =$
 1 , 不满足互异性, 舍去.

14. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ 【解析】当命题 p 为真命题, 即方程 $a^2x^2 + ax - 2 = 0$ 在 $[-1, 1]$ 上有解, 由 $a^2x^2 + ax - 2 = 0$, 得 $(ax+2)(ax-1) = 0$, 显然 $a \neq 0$, $\therefore x = -\frac{2}{a}$ 或 $x = \frac{1}{a}$, $\therefore x \in [-1, 1]$, 故 $|\frac{2}{a}| \leq 1$ 或 $|\frac{1}{a}| \leq 1$, $\therefore |a| \geq 1$, 即实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

15. $(-1, 1)$ 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称, $\therefore x > 0$ 时, $-x < 0$, $f(-x) = -e^{x-1} - 2x = f(x)$, $x < 0$ 同理: $f(-x) = f(x)$, $\therefore f(x)$ 为偶函数, 易知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 且 $f(1) = -e^0 - 2 = -3$, $f(x) + 3 > 0$ 即 $f(x) > -3$, 即 $f(x) > f(1)$, 根据偶函数的性质知当 $|x| < 1$ 时, 得 $-1 < x < 1$.

16. $\sqrt{2}$ 【解析】 $f'(x) = \frac{3}{x} - 2x$, $(x > 0)$ 与直线 $y = x$ 平行的切线斜率 $k = 1 = \frac{3}{x} - 2x$, 解得 $x = 1$ 或 $x = -\frac{3}{2}$ (舍去), 又 $f(1) = -1$, 即切点 $(1, -1)$, 则切点到直线 $y = x$ 的距离为 $d = \frac{|1+1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, A 到直线 $y = x$ 距离的最小值为 $\sqrt{2}$.

17. 【解析】(I) 当 $m = 1$ 时, $A = \{x | x^2 - 3x \leq 0\} = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$, 2 分
所以 $A \cup B = \{x | -2 \leq x \leq 4\}$, 4 分
(II) 集合 $A = \{x | x^2 - (m+2)x + (1-m)(2m+1) \leq 0\} = \{x | (x+m-1)(x-2m-1) \leq 0\}$
若 $m \geq 0$, 则 $A = \{x | 1-m \leq x \leq 2m+1\}$, 5 分
 $\therefore B \subseteq A$, $\therefore \begin{cases} 1-m \leq -2 \\ 2m+1 \geq 4 \end{cases}$, 解得 $m \geq 3$, 7 分
若 $m < 0$, 则 $A = \{x | 2m+1 \leq x \leq 1-m\}$,
 $\therefore B \subseteq A$, $\therefore \begin{cases} 2m+1 \leq -2 \\ 1-m \geq 4 \end{cases}$, 解得 $m \leq -3$, 9 分
 $\therefore m$ 的取值范围为 $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$, 10 分

18. 【解析】(I) 当命题 q 为真命题时,
函数 $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax$ 在 $[3, +\infty)$ 上单调递减,
所以 $g'(x) = -x^2 + 2x + a \leq 0$ 在 $[3, +\infty)$ 上恒成立, 2 分
 $g'(x) = -x^2 + 2x + a = -(x-1)^2 + 1 + a$
所以 $g'(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 上单调递减, 故 $g'(3) \leq 0$,
解得 $a \leq -3$,

百校联考2020年高考考前冲刺必刷题-文数答案

所以 q 是真命题, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 3]$,
..... 4 分

(II) 命题 p 为真命题时, 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{a}{x} + 1)$ 在 $[-2, -1]$ 上单调递增, $\therefore 0 < a < 1$, 6 分
因为 p 或 q 为真命题, p 且 q 为假命题, 所以 p 与 q 的真值相反, 7 分

(i) 当 p 真且 q 假时, 有 $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ a > 3 \end{cases}$,
此不等式无解, 9 分

(ii) 当 p 假且 q 真时, 有 $\begin{cases} a \leq 0 \text{ 或 } a \geq 1 \\ a \leq 3 \end{cases}$,
解得 $a \leq 0$ 或 $1 \leq a \leq 3$, 11 分
综上可得, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 0] \cup [1, 3]$,
..... 12 分

19. 【解析】(I) 当 $m = 1$ 时, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - 3x + 8)$,
此时函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$;
因为函数 $y = 2x^2 - 3x + 8$ 的最小值为 $\frac{4 \times 2 \times 8 - 3^2}{8} = \frac{55}{8}$,
最大值为 $2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 8 = 10$, 故函数 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上的值域为 $[\log_{\frac{1}{2}} 10, \log_{\frac{1}{2}} \frac{55}{8}]$; 6 分
(II) 因为函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,
故 $g(x) = 2mx^2 - 3x + 8m$ 在 $(4, +\infty)$ 上单调递增, 则 $\begin{cases} m > 0, \\ \frac{3}{4m} \leq 4, \\ g(4) \geq 0, \end{cases}$
解得 $m \geq \frac{3}{10}$, 综上所述, 实数 m 的取值范围 $[\frac{3}{10}, +\infty)$, 12 分

20. 【解析】(I) $f(x) = x(a-x) - \ln x = -x^2 + ax - \ln x$
对函数 $f(x)$ 求导得 $f'(x) = -2x + a + \frac{1}{x}$, 1 分
函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在两个极值点 x_1, x_2 ,
所以 $f'(x) = -\frac{2x^2 - ax + 1}{x} = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个解, 即方程 $2x^2 - ax + 1 = 0$ 必有两个不等正根, 3 分
 $\begin{cases} \Delta - a^2 - 8 > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{1}{2} > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{a}{2} > 0 \end{cases}$, 5 分

解得 $a > 2\sqrt{2}$, 所以实数 a 的取值范围为 $(2\sqrt{2}, +\infty)$ 6 分

(II) 由题意知 $f(x_1) + f(x_2) = a(x_1 + x_2) - (x_1^2 + x_2^2) - (\ln x_1 + \ln x_2)$
 $= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} + 1 - \ln \frac{1}{2} = \frac{a^2}{4} + 1 + \ln 2$, 9 分

由 $a > 2\sqrt{2}$ 得 $f(x_1) + f(x_2) > 2 + 1 + \ln 2 = 3 + \ln 2$, 即 $f(x_1) + f(x_2) > 3 + \ln 2$ 12 分

21. 【解析】(I) 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(x) + f(-x) = 0$ 恒成立, 则 $2(a+b)x^2 = 0$.
 所以 $b = -a$, 所以 $f(x) = ax^3 - 12ax$ 1 分

则 $f'(x) = 3ax^2 - 12a = 3a(x+2)(x-2)$
 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -2$ 或 $x = 2$.
 当 $x \in (-2, 2)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.
 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 单调递增,
 所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(2)$, 3 分

由 $f(2) = 8a - 24a = -16a = -16$, 解得 $a = 1$.
 所以 $a = 1, b = -1$ 5 分

(II) 由 (I) 可知 $f(x) = x^3 - 12x, f'(x) = 3x^2 - 12$, 6 分

方程 $f'(x) = 2x^3 + m$ 即为 $3x^2 - 12 = 2x^3 + m$
 即方程 $2x^3 - 3x^2 + m + 12 = 0$ 有三个不等的实数根, 7 分

设 $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + m + 12$, 只要使曲线有 3 个零点即可. 8 分

设 $g'(x) = 6x^2 - 6x = 0, \therefore x = 0$ 或 $x = 1$ 分别为 $g(x)$ 的极值点,
 当 $x \in (-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 时 $g'(x) > 0, g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增,
 当 $x \in (0, 1)$ 时 $g'(x) < 0, g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,
 所以, $x = 0$ 为极大值点, $x = 1$ 为极小值点. 9 分

所以要使曲线与 x 轴有 3 个交点, 当且仅当
 $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} m+12 > 0 \\ m+11 < 0 \end{cases}$, 11 分

解得 $-12 < m < -11$.
 即实数 m 的取值范围为 $(-12, -11)$ 12 分

22. 【解析】(I) 因为 $f(x) = a(x-1)e^x - \frac{x^2}{2}$,
 得 $f'(x) = axe^x - x - x(ae^x - 1)$, 2 分

所以 $f'(1) = ae - 1$.
 因为曲线在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $2x + 2y - 1 = 0$,
 所以 $f'(1) = ae - 1 = -1$, 即 $a = 0$ 5 分

(II) $f(x) = a(x-1)e^x - \frac{x^2}{2}$ 存在两个零点, 即方程 $a(x-1) = \frac{x^2}{2e^x}$ 有两个根, 也即直线 $y = a(x-1)$ 与函数 $y = \frac{x^2}{2e^x}$ 的图像有两个交点, 7 分

记 $h(x) = \frac{x^2}{2e^x} \Rightarrow h'(x) = \frac{x(2-x)}{2e^x}$,
 由 $h'(x) > 0 \Rightarrow x(2-x) > 0 \Rightarrow 0 < x < 2$, 由 $h'(x) < 0 \Rightarrow x(2-x) < 0 \Rightarrow x < 0$ 或 $x > 2$,
 故 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减. 9 分

且 $h(0) = 0, x > 0$ 时 $h(x) > 0$,
 又直线 $y = a(x-1)$ 过 $(1, 0)$, 斜率为 a ,
 由图象观察知: 当 $a < 0$ 时直线 $y = a(x-1)$ 与 $h(x) = \frac{x^2}{2e^x}$ 的图象必有两个交点, 10 分

当 $a \geq 0$ 时直线 $y = a(x-1)$ 与 $h(x) = \frac{x^2}{2e^x}$ 的图象只有一个交点, 11 分

综上, 函数 $f(x)$ 存在两个零点, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 0)$ 12 分

和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号 **zizzsw**。



识别二维码，快速关注