2022～2023学年高三年级模拟试卷(常州)
数学参考答案及评分标准

1. C　2. A　3. B　4. D　5. D　6. C　7. A　8. A　9. AD　10. ABC　11. AD　12. BC

13. 23.5　14. 3　15. $(-\infty, 0)$　16. $n^2 2^{n-1}$　$(2n-1)2^n+1$

17. 解：(1) X的可能取值为0，1，2，

$P(X=0)=\dfrac{C_4^2}{C_7^2}=\dfrac{2}{7}$，$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_4^1}{C_7^2}=\dfrac{4}{7}$，$P(X=2)=\dfrac{C_3^2}{C_7^2}=\dfrac{1}{7}$，

所以随机变量X的概率分布为

X	0	1	2
P	$\dfrac{2}{7}$	$\dfrac{4}{7}$	$\dfrac{1}{7}$

所以随机变量X的数学期望为$E(X)=0\times\dfrac{2}{7}+1\times\dfrac{4}{7}+2\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{6}{7}$.(5分)

(2) 记事件B：从乙袋中取出的2个球中恰有1个红球，

(1)中$X=0$，1，2正好为“从甲袋中任取2个球”的样本空间，由全概率公式，得

$P(B)=\sum\limits_{i=0}^{2}P(X=i)P(B|X=i)=\dfrac{2}{7}\times\dfrac{C_4^1}{C_5^2}+\dfrac{4}{7}\times\dfrac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}+\dfrac{1}{7}\times\dfrac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\dfrac{19}{35}$，

所以从乙袋中取出的2个球中恰有1个红球的概率为$\dfrac{19}{35}$.(10分)

18. 解：(1) 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q.

因为$a_1=b_1=1$，$a_1+a_2=b_3$，$15a_1+a_9=b_6$，

所以$2+d=q^2\neq0$，$16+8d=q^5$，所以$q^3=\dfrac{16+8d}{2+d}=8$，所以$q=2$，$d=2$.

从而$a_n=2n-1$，$b_n=2^{n-1}$.(6分)

(2) 易知$c_n=log_2b_{n+1}=log_2 2^n=n$，

所以$\dfrac{c_n^2}{a_na_{n+1}}=\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n^2}{4n^2-1}=\dfrac{1}{4}[1+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}]=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})$，

所以$S_n=\dfrac{c_1^2}{a_1a_2}+\dfrac{c_2^2}{a_2a_3}+\cdots+\dfrac{c_n^2}{a_na_{n+1}}=\dfrac{n}{4}+\dfrac{1}{8}(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})$，

即$S_n=\dfrac{n}{4}+\dfrac{n}{4(2n+1)}=\dfrac{2n^2+2n}{8n+4}=\dfrac{n^2+n}{4n+2}$.(12分)

19. 解：(1) 由$c^2=ab\,cos\,C$及正弦定理得$sin^2C=sinA\,sin\,B\,cos\,C$，所以$\dfrac{sin\,C}{sin\,A\,sin\,B}=\dfrac{cos\,C}{sin\,C}$.

因为锐角三角形中，$A+B=\pi-C$，所以$sin\,(A+B)=sin\,(\pi-C)=sin\,C$，

所以$\dfrac{sin\,A\,cos\,B+cos\,A\,sin\,B}{sin\,A\,sin\,B}=\dfrac{cos\,C}{sin\,C}$，所以$\dfrac{1}{tan\,A}+\dfrac{1}{tan\,B}=\dfrac{1}{tan\,C}$.(5分)

(2) 因为$CD=1$，所以$AD=\dfrac{1}{tan\,A}$，$BD=\dfrac{1}{tan\,B}$，所以$AB=AD+BD=\dfrac{1}{tan\,C}$.

又因为$tan\,C=tan\,(\angle ACD+\angle BCD)=\dfrac{tan\,\angle ACD+tan\,\angle BCD}{1-tan\,\angle ACD\cdot tan\,\angle BCD}=\dfrac{AD+BD}{1-AD\cdot BD}$，

所以$AD+BD=\dfrac{1-AD\cdot BD}{AD+BD}$，(9分)

所以$(AD+BD)^2=1-AD\cdot BD\geqslant1-(\dfrac{AD+BD}{2})^2$，当且仅当$AD=BD$时等号成立，

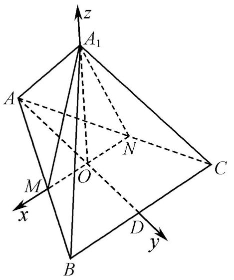
所以$\frac{5}{4}(AD+BD)^2\geq 1$，所以 $AB=AD+BD\geq\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

所以 AB 的最小值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.(12 分)

20. (1) **证明**：因为 $MN\parallel BC$，$MN\not\subset$平面 A_1BC，$BC\subset$平面 A_1BC，所以 $MN\parallel$平面 A_1BC，又因为 $MN\subset$平面 A_1MN，平面 $A_1MN\cap$平面 $A_1BC=l$，所以 $l\parallel BC$.(4 分)

(2) **解**：取 BC 的中点 D，连接 AD 交 MN 于点 O，连接 OA_1.

在正三角形 ABC 中，$MN\parallel BC$，D 为 BC 的中点，所以 O 为 MN 的中点，$AM=AN$，



所以 $OD\perp MN$，$A_1M=AM=AN=A_1N$，从而 $OA_1\perp MN$.

因为二面角 A_1MNB 是直二面角，即平面 $A_1MN\perp$平面 BMN，

平面 $A_1MN\cap$平面 $BMN=MN$，$OA_1\subset$平面 A_1MN，

所以 $OA_1\perp$平面 BMN，即 $OA_1\perp$平面 ABC.(8 分)

设 $OA=OA_1=x$，则$\frac{MN}{BC}=\frac{OA}{AD}=\frac{x}{2\sqrt{3}}$ ，所以 $MN=\frac{2x}{\sqrt{3}}$.

因为三棱锥 A_1AMN 的体积为 1，

所以$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}MN\cdot OA\cdot OA_1=1$，即$\frac{1}{3}\times\frac{x}{\sqrt{3}}\cdot x^2=1$，所以 $x=\sqrt{3}$.(9 分)

以 O 为原点，OM，OD，OA_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系 Oxyz，

易得平面 A_1MN 的一个法向量为 $\boldsymbol{n_1}=(0，1，0)$，

$M(1，0，0)$，$A_1(0，0，\sqrt{3})$，$B(2，\sqrt{3}，0)$，所以$\overrightarrow{MB}=(1，\sqrt{3}，0)$，$MA_1=(-1，0，\sqrt{3})$，

设平面 A_1MB 的法向量为 $\boldsymbol{n_2}=(x，y，z)$，有$\begin{cases}\overrightarrow{MB}\cdot\boldsymbol{n_2}=0,\\ MA_1\cdot\boldsymbol{n_2}=0,\end{cases}$ 则$\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0,\\ -x+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$，

则 $x=\sqrt{3}$ ，$y=-1$，

所以平面 A_1MB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n_2}=(\sqrt{3}，-1，1)$，$\frac{\boldsymbol{n_1}\cdot\boldsymbol{n_2}}{|\boldsymbol{n_1}||\boldsymbol{n_2}|}=\frac{-1}{1\times\sqrt{3+1+1}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

即二面角 NA_1MB 的正弦值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.(12 分)

21. **解**：(1) 因为 C 的焦点在 x 轴上且长轴为 $4\sqrt{2}$ ，则 $2a=4\sqrt{2}$ ，

故可设椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{b^2}=1(2\sqrt{2}>b>0)$.

因为点 $P(2，-1)$在椭圆 C 上，所以$\frac{4}{8}+\frac{1}{b^2}=1$，

解得 $b^2=2$，所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.(3 分)

由$\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 整理得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-8=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-8km}{1+4k^2},\\ x_1x_2=\dfrac{4m^2-8}{1+4k^2},\end{cases}$

所以 $k_1k_2=\dfrac{y_1+1}{x_1-2}\cdot\dfrac{y_2+1}{x_2-2}=\dfrac{(kx_1+m+1)(kx_2+m+1)}{(x_1-2)(x_2-2)}=\dfrac{k^2x_1x_2+k(m+1)(x_1+x_2)+(m+1)^2}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}=\dfrac{1}{4}$，

所以$(4k^2-1)x_1x_2+(4km+4k+2)(x_1+x_2)+4(m^2+2m)=0$，

所以$(4k^2-1)\dfrac{4m^2-8}{1+4k^2}+(4km+4k+2)\dfrac{-8km}{1+4k^2}+4(m^2+2m)=0$，

整理得$(2k-1)(2k+1+m)=0$，因为直线 l 不经过点 P，

所以 $2k+1+m\neq 0$，故 $2k-1=0$，即 $k=\dfrac{1}{2}$ 为定值．(7 分)

(2) 因为直线 l：$y=\dfrac{1}{2}x+m$，所以 $Q(-2m,0)$，

由 $\begin{cases}y=\dfrac{1}{2}x+m,\\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 得 $2x^2+4mx+4m^2-8=0$，即 $x^2+2mx+2m^2-4=0$，则 $\begin{cases}x_1+x_2=-2m,\\ x_1x_2=2m^2-4,\end{cases}$

所以$|\overrightarrow{QA}|^2+|\overrightarrow{QB}|^2=(x_1+2m)^2+y_1^2+(x_2+2m)^2+y_2^2$

$=(x_1+2m)^2+\dfrac{1}{4}(x_1+2m)^2+(x_2+2m)^2+\dfrac{1}{4}(x_2+2m)^2=\dfrac{5}{4}[(x_1+2m)^2+(x_2+2m)^2]$

$=\dfrac{5}{4}[x_1^2+x_2^2+4m(x_1+x_2)+8m^2]=\dfrac{5}{4}[(x_1+x_2)^2+4m(x_1+x_2)-2x_1x+8m^2]$

$=\dfrac{5}{4}[(-2m)^2-2m\cdot 4m-2(2m^2-4)+8m^2]=10$.(12 分)

22. 解：(1) 因为 $a=1$，$f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+3x$，$f'(x)=-x^2+2x+3=0$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$，3.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	递减	极小值	递增	极大值	递减

所以函数 $f(x)$的单调递增区间为$(-1,3)$，单调递减区间为$(-\infty,-1)$，$(3,+\infty)$.(4 分)

(2) 因为函数 $f(x)$有两个极值点 x_1，x_2，

所以 $f'(x)=-x^2+2ax+3a=0$ 有两个不相等的解 x_1，x_2，$\Delta=4a^2+12a>0$，

所以 $a>0$ 或 $a<-3$，$x_1^2=2ax_1+3a$，则 $x_1^3=2ax_1^2+3ax_1$，

所以 $f(x_1)=-\dfrac{1}{3}(2ax_1^2+3ax_1)+ax_1^2+3ax_1+1-a^2$，

$=\dfrac{a}{3}x_1^2+2ax_1+1-a^2=\dfrac{a}{3}(2ax_1+3a)+2ax_1+1-a^2=(\dfrac{2}{3}a^2+2a)x_1+1$，

同理 $f(x_2)=(\dfrac{2}{3}a^2+2a)x_2+1$，

则过点$(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$的直线方程为 $y=(\dfrac{2}{3}a^2+2a)x+1$.(7 分)

由题意知$(\dfrac{2}{3}a^2+2a)x+1<x\cdot e^x-\ln x+x$，对任意 $x\in(0,+\infty)$恒成立，

等价于 $\dfrac{2}{3}a^2+2a<\dfrac{x\cdot e^x-\ln x+x-1}{x}$，对任意 $x\in(0,+\infty)$恒成立.

先证：$e^x \geq x+1$，当且仅当 $x=0$ 时成立.

令 $g(x)=e^x-x-1$，$g'(x)=e^x-1$，所以 $g(x)$在$(-\infty，0)$上单调递减，在$(0，+\infty)$上单调递增，

所以当且仅当 $x=0$ 时，$g(x)$的最小值为 $g(0)=0$，

所以$\frac{e^{x+\ln x}-\ln x+x-1}{x} \geq \frac{x+\ln x+1-\ln x+x-1}{x}=2$，当且仅当 $x+\ln x=0$ 时取等号，

令 $t(x)=x+\ln x$，$t(1)=1>0$，$t(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}-1<0$，$t(x)$的图象是连续不间断的，

所以存在 $x_0 \in (\frac{1}{e}，1)$，使 $x_0+\ln x_0=0$，所以$\frac{e^{x+\ln x}-\ln x+x-1}{x}$ 的最小值为 2.(10 分)

所以 $\frac{2}{3}a^2+2a<2$，因为 $a>0$ 或 $a<-3$，

所以实数 a 的取值范围是$(0，\frac{\sqrt{21}-3}{2})\cup(\frac{-\sqrt{21}-3}{2}，-3)$.(12 分)