

平邑一中新校区高二下学期4月份月考

数学试卷

一、单项选择题：本题共8个小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 4名同学参加跑步、跳远、跳高三个项目，每人限报1项，共有（ ）种报名方法。

- A. 64种 B. 81种 C. 32种 D. 12种

【答案】B

【解析】

【分析】利用分步乘法原理即得解。

【详解】每名同学有3种选法，根据分步乘法原理得共有 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ 种报名方法。

故选：B

2. 设 $f(x) = ax^3 + x$ ，若 $f'(-1) = 4$ ，则 $a =$ （ ）

- A. 1 B. -2 C. 3 D. -1

【答案】A

【解析】

【分析】根据导数值直接构造方程求解即可。

【详解】 $\because f'(x) = 3ax^2 + 1$ ， $\therefore f'(-1) = 3a + 1 = 4$ ，解得： $a = 1$ 。

故选：A

3. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x - 4\ln x + 3$ ，则 $f(x)$ 的极小值为（ ）

- A. 2 B. $2 - 3\ln 2$ C. $\ln 2 - 3$ D. $3 - 4\ln 2$

【答案】D

【解析】

【分析】利用导数法求函数的极值的步骤及函数的极小值的定义即可求解。

【详解】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，

因为 $f(x) = x^2 - 2x - 4\ln x + 3$

所以 $f'(x) = 2x - 2 - \frac{4}{x} = \frac{2(x+1)(x-2)}{x}$ ，

令 $f'(x) = 0$ ，则 $\frac{2(x+1)(x-2)}{x} = 0$ ，解得 $x = 2$ 或 $x = -1$ （舍），

x	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

由此表可知，当 $x=2$ 时， $f(x)$ 的取得极小值为 $f(2)=4-4-4\ln 2+3=3-4\ln 2$.

故选：D.

4. 丹麦数学家琴生 (Jensen) 是 19 世纪对数学分析做出卓越贡献的巨人，特别是在函数的凸凹性与不等式方面留下了很多宝贵的成果. 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上的导函数为 $f'(x)$ ， $f'(x)$ 在 (a, b) 上的导函数为 $f''(x)$ ，在 (a, b) 上 $f''(x) > 0$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上为“凹函数”. 则下列函数在 $(0, 2\pi)$ 上是“凹函数”的是 ()

- A. $f(x) = x - \sin x$ B. $f(x) = x^2 + \sin x$ C. $f(x) = x + \ln x$ D. $f(x) = e^x - x \ln x$

【答案】B

【解析】

【分析】根据“凹函数”的定义逐项验证即可解出.

【详解】对 A， $f'(x) = 1 - \cos x$ ， $f''(x) = \sin x$ ，当 $x \in (\pi, 2\pi)$ 时， $f''(x) < 0$ ，所以 A 错误；

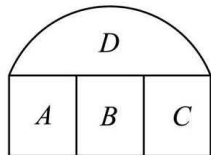
对 B， $f'(x) = 2x + \cos x$ ， $f''(x) = 2 - \sin x > 0$ 在 $(0, 2\pi)$ 上恒成立，所以 B 正确；

对 C， $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ ， $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ ，所以 C 错误；

对 D， $f'(x) = e^x - \ln x - 1$ ， $f''(x) = e^x - \frac{1}{x}$ ，因为 $f''\left(\frac{1}{e}\right) = e^e - e < 0$ ，所以 D 错误.

故选：B.

5. 如图，提供 4 种不同的颜色给图中 A，B，C，D 四块区域涂色，若相邻的区域不能涂同一种颜色，则不同的涂法共有 () 种.



A. 12

B. 36

C. 48

D. 72

【答案】C

【解析】

【分析】根据使用颜色的数量进行分类计算即可.

【详解】如果只用了 3 种颜色，则 ABD 三块区域颜色必两两不同， C 区域必与 A 相同，

则涂法有 $A_4^3 = 24$ 种；

如果用了全部 4 种颜色，则涂法有 $A_4^4 = 24$ 种；

所以总共有 $24 + 24 = 48$ 种涂法.

故选：C.

6. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + 2 = 0 (a \in \mathbf{R})$ 有两个不同的零点，则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(0, +\infty)$

B. $(0, e)$

C. $(e, +\infty)$

D. $(-\infty, e)$

【答案】B

【解析】

【分析】先求函数定义域，进而转化为 $g(x) = \frac{\ln x + 2}{x}$, $x \in (0, +\infty)$ 与 $y = a$ 两函数有两个交点，利用导函数得到 $g(x) = \frac{\ln x + 2}{x}$ 的单调性，得到函数极值和最值，画出函数图象，数形结合得到答案.

【详解】 $f(x) = \ln x - ax + 2 = 0 (a \in \mathbf{R})$ 定义域为 $(0, +\infty)$,

故 $\frac{\ln x + 2}{x} = a$ 有两个不同的根，即 $g(x) = \frac{\ln x + 2}{x}$, $x \in (0, +\infty)$ 与 $y = a$ 两函数有两个交点，

其中 $g'(x) = \frac{1 - \ln x - 2}{x^2} = -\frac{1 + \ln x}{x^2}$,

当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $g'(x) > 0$,

故 $g(x) = \frac{\ln x + 2}{x}$ 在 $0 < x < \frac{1}{e}$ 上单调递增, 在 $x > \frac{1}{e}$ 上单调递减,

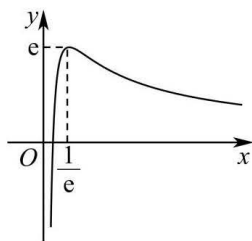
从而 $g(x) = \frac{\ln x + 2}{x}$ 在 $x = \frac{1}{e}$ 处取得极大值, 也是最大值,

$g(x)_{\max} = \frac{-1 + 2}{\frac{1}{e}} = e$,

且当 $x > \frac{1}{e^2}$ 时, $g(x) = \frac{\ln x + 2}{x} > 0$ 恒成立,

当 $0 < x < \frac{1}{e^2}$ 时, $g(x) = \frac{\ln x + 2}{x} < 0$ 恒成立,

画出 $g(x) = \frac{\ln x + 2}{x}$ 的图象如下:



显然要想 $g(x) = \frac{\ln x + 2}{x}$, $x \in (0, +\infty)$ 与 $y = a$ 两函数有两个交点,

需要满足 $a \in (0, e)$,

综上: 实数 a 的取值范围是 $(0, e)$.

故选: B

7. 若函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - \ln x$ 在区间 $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ 内存在单调递减区间, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(9, +\infty)$ B. $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ C. $(-\infty, 9)$ D. $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$

【答案】C

【解析】

【分析】利用导数求得 $f(x)$ 单调递减区间, 问题等价于 $f(x)$ 单调递减区间与区间 $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ 的交集为非空区间, 从而可以求参.

【详解】由 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - \ln x (x > 0)$, 可得 $f'(x) = ax - \frac{1}{x}$.

①当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递减,

所以当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - \ln x$ 在区间 $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ 内存在单调递减区间.

②当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 可得 $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$,

当 $0 < x < \frac{1}{\sqrt{a}}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x > \frac{1}{\sqrt{a}}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

所以函数 $f(x)$ 的减区间为 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$, 增区间为 $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, +\infty\right)$,

若函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - \ln x$ 在区间 $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ 内存在单调递减区间,

只需 $\frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{a}}$, 得 $0 < a < 9$.

综上所述, $a < 9$.

故选: C

8. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)\ln x + \frac{1}{x}f(x) < 0$ (其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数), 若 $a = f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$, $b = f\left(e^{\frac{1}{3}}\right)$,

$c = f\left(e^{\frac{1}{4}}\right)$, 则下列选项中正确的是 ()

A. $6a < 4b < 3c$

B. $6a < 3c < 4b$

C. $4b < 6a < 3c$

D. $4b < 3c < 6a$

【答案】A

【解析】

【分析】根据已知条件构造函数 $g(x) = f(x)\ln x$, 利用导数法求函数的单调性及指数函数的单调性, 结合不等式的性质即可求解.

【详解】由 $f'(x)\ln x + \frac{1}{x}f(x) < 0$, 得 $[f(x)\ln x]' < 0$,

令 $g(x) = f(x)\ln x$, $x \in (0, +\infty)$, 则

$g'(x) = f'(x)\ln x + \frac{1}{x}f(x) < 0$,

所以 $g'(x) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数,

因为 $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, 且 $y = e^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调性递增;

所以 $e^{\frac{1}{2}} > e^{\frac{1}{3}} > e^{\frac{1}{4}}$,

所以 $g\left(e^{\frac{1}{2}}\right) < g\left(e^{\frac{1}{3}}\right) < g\left(e^{\frac{1}{4}}\right)$,

所以 $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)\ln e^{\frac{1}{2}} < f\left(e^{\frac{1}{3}}\right)\ln e^{\frac{1}{3}} < f\left(e^{\frac{1}{4}}\right)\ln e^{\frac{1}{4}}$,

所以 $\frac{1}{2}a < \frac{1}{3}b < \frac{1}{4}c$, 即 $6a < 4b < 3c$.

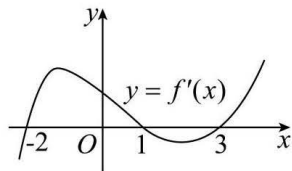
故选: A.

【点睛】关键点睛: 解决此题的关键是构造函数 $g(x) = f(x)\ln x$, 利用导数法求函数的单调性, 结合指数函数的

单调性及不等式的性质即可.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 如图是导函数 $y = f'(x)$ 的图象，则下列说法正确的是 ()



- A. 函数 $y = f(x)$ 在区间 $(1, 3)$ 上单调递减
B. 函数 $y = f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减
C. 函数 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值
D. 函数 $y = f(x)$ 在 $x = -2$ 处取得极小值

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据导函数图象，结合函数的单调性与极值与导数的关系逐项判断即可.

【详解】对于 A. 因为 $y = f'(x) < 0$ 在区间 $(1, 3)$ 上成立，所以区间 $(1, 3)$ 是 $y = f(x)$ 的单调递减区间，故 A 正确；

对于 B. 因为当 $-2 < x < 0$ 时， $f'(x) > 0$ ，当 $x < -2$ 时， $f'(x) < 0$ ，所以 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上不单调，故 B 错误；

对于 C. 因为当 $-2 < x < 1$ 时， $f'(x) > 0$ ，当 $1 < x < 3$ 时， $f'(x) < 0$ ，函数 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值，故 C 正确；

对于 D. 因为当 $x < -2$ 时， $f'(x) < 0$ ，当 $-2 < x < 1$ 时， $f'(x) > 0$ ，所以函数 $y = f(x)$ 在 $x = -2$ 处取得极小值，故 D 正确.

故选：ACD.

10. A、B、C、D、E 五个人并排站在一起，则下列说法正确的有 ()

- A. 若 A、B 两人站在一起有 48 种方法
B. 若 A、B 不相邻共有 12 种方法
C. 若 A 在 B 左边有 60 种排法
D. 若 A 不站在最左边，B 不站最右边，有 72 种方法

【答案】AC

【解析】

【分析】根据分类加法，分步乘法原理，结合排列的相关知识点，对选项一一分析.

【详解】对于 A，先将 A、B 排列，再看成一个元素，和剩余的 3 人，

一共 4 个元素进行全排列，由分步原理可知共有 $A_2^2 A_4^4 = 48$ 种，所以 A 正确；

对于 B, 先将 A, B 之外的 3 人全排列, 产生 4 个空, 再将 A, B 两元素插空,

所以共有 $A_3^3 A_4^2 = 72$ 种, 所以 B 不正确;

对于 C, 5 人全排列, 而其中 A 在 B 的左边和 A 在 B 的右边是等可能的,

所以 A 在 B 的左边的排法有 $\frac{1}{2} A_5^5 = 60$ 种, 所以 C 正确;

对于 D, 对 A 分两种情况: 一是若 A 站在最右边, 则剩下的 4 人全排列有 $A_4^4 = 24$ 种,

另一个是 A 不在最左边也不在最右边, 则 A 从中间的 3 个位置中任选 1 个,

然后 B 从除最右边的 3 个位置中任选 1 个, 最后剩下 3 人全排列,

即 $A_3^1 A_3^1 A_3^3 = 54$, 由分类加法原理可知共有 $24 + 54 = 78$ 种, 所以 D 不正确,

故选: AC.

11. $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, 有 $xf'(x) + 2f(x) > 0$ 恒成立, 则 ()

A. $f(1) < 4f(2)$

B. $f(-1) < 4f(-2)$

C. $16f(4) < 9f(3)$

D. $4f(-2) > 9f(-3)$

【答案】AD

【解析】

【分析】令 $g(x) = x^2 f(x)$, 根据条件可得 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 然后逐一判断即可.

【详解】令 $g(x) = x^2 f(x)$, $\because$ 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) + 2f(x) > 0$,

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $g'(x) = 2xf'(x) + x^2 f''(x) = x[xf'(x) + 2f(x)] > 0$,

$\therefore g(x) = x^2 f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

又 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $y = x^2$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,

$\therefore g(x) = x^2 f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数; $\therefore g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

由 $g(2) > g(1)$, 可得 $4f(2) > f(1)$, 故 A 正确;

由 $g(-1) > g(-2)$, 可得 $f(-1) > 4f(-2)$, 故 B 错误;

由 $g(3) < g(4)$, 可得 $16f(4) > 9f(3)$, 故 C 错误;

由 $g(-2) > g(-3)$, 可得 $4f(-2) > 9f(-3)$, 故 D 正确.

故选: AD

12. 函数 $f(x) = \frac{2}{x} + \ln x$, 以下说法正确的是 ()

- A. 函数 $f(x)$ 有零点
B. 当 $a > 1 + \ln 2$ 时, 函数 $y = f(x) - a$ 有两个零点
C. 函数 $g(x) = f(x) - x$ 有且只有一个零点
D. 函数 $g(x) = f(x) - x$ 有且只有两个零点

【答案】BC

【解析】

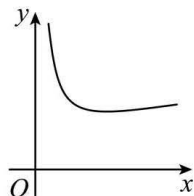
【分析】利用导函数研究函数的单调性, 进而得到函数的最值, 根据零点存在定理求解即可.

【详解】 $f(x) = \frac{2}{x} + \ln x$, 定义域 $x \in (0, +\infty)$, 所以 $f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-2}{x^2}$,

令 $f'(x) > 0$ 解得 $x > 2$, 令 $f'(x) < 0$ 解得 $0 < x < 2$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, $f(x)_{\min} = f(2) = 1 + \ln 2 > 0$,

则 $f(x)$ 的图象如图所示:



故 A 错误;

又当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 所以从图像可得, 当 $a > 1 + \ln 2$ 时, 函数 $y = f(x) - a$ 有两个零点, B 正确;

$$g'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - 1 = \frac{-2 + x - x^2}{x^2} = -\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}{x^2} < 0 \text{ 恒成立,}$$

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

又 $g(1) = 1 > 0$, $g(2) = \ln 2 - 1 < 0$, 所以函数 $g(x) = f(x) - x$ 有且只有一个零点, C 正确, D 错误;

故选: BC

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若 $\frac{A_9^5 + A_9^4}{A_{10}^6 - A_{10}^5} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{3}{20}$ 0.15

【解析】

【分析】根据排列公式即可求出结果.



【详解】 $\frac{A_9^5 + A_9^4}{A_{10}^6 - A_{10}^5} = \frac{5A_9^4 + A_9^4}{5A_{10}^5 - A_{10}^5} = \frac{6 \cdot A_9^4}{4 \cdot A_{10}^5} = \frac{6A_9^4}{4 \times 10 \cdot A_9^4} = \frac{3}{20}$,

故答案为: $\frac{3}{20}$.

14. 函数 $f(x) = x^2 + 2ax + 1$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为 $f(1)$, 则 a 的取值范围为_____.

【答案】 $(-\infty, -1]$

【解析】

【分析】 求导, 根据函数在 $[0,1]$ 上的最小值为 $f(1)$ 即可判断函数的单调性, 将恒成立转化为函数最值问题求解.

【详解】 $f'(x) = 2x + 2a$, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为 $f(1)$,

说明 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减,

所以当 $x \in [0,1]$ 时, $f'(x) \leq 0$ 恒成立, 即 $2x + 2a \leq 0$.

所以 $a \leq -x$. 所以 $a \leq -1$.

故答案为: $(-\infty, -1]$

15. 已知函数 $f(x) = e^x - e^{-x} - x$, 若 $f(t^2 + t) + f(3t) < 0$ 成立, 则实数 t 的取值范围为_____.

【答案】 $(-4, 0)$

【解析】

【分析】 由函数解析式可知函数 $f(x)$ 是奇函数, 利用导数可判断函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 利用函数单调性可知 $f(t^2 + t) + f(3t) < 0$ 等价于 $t^2 + t < -3t$, 解出不等式即可求得实数 t 的取值范围.

【详解】 由题得函数的定义域为 $\mathbb{R}$,

因为 $f(-x) = e^{-x} - e^x + x = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是奇函数.

又 $f'(x) = e^x + e^{-x} - 1 \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} - 1 = 1 > 0$ 恒成立, 所以函数在 $\mathbb{R}$ 上单调递增;

不等式 $f(t^2 + t) + f(3t) < 0$ 等价于 $f(t^2 + t) < -f(3t) = f(-3t)$,

所以 $t^2 + t < -3t$, 即 $t^2 + 4t < 0$, 解得 $-4 < t < 0$.

所以实数 t 的取值范围为 $(-4, 0)$.

故答案为: $(-4, 0)$

16. 已知 P 为曲线 $y = \ln x$ 上的一动点, Q 为直线 $y = x + 1$ 上的一动点, 则当 P 的坐标为_____时, PQ 最小, 此

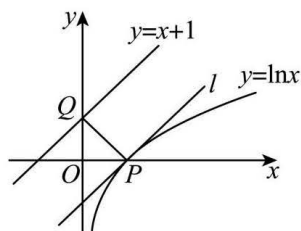
时最小值为_____.

【答案】 ①. $(1,0)$ ②. $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】通过图像可知当直线 l 与曲线 $y = \ln x$ 相切且与直线 $y = x + 1$ 平行时,切点到直线 $y = x + 1$ 的距离即为 PQ 的最小值,利用导数几何意义可构造方程求得 P ,利用点到直线距离公式求得 PQ 最小值.

【详解】如图所示,当直线 l 与曲线 $y = \ln x$ 相切且与直线 $y = x + 1$ 平行时,切点到直线 $y = x + 1$ 的距离即为 PQ 的最小值.



令 $y' = \frac{1}{x} = 1$, 解得: $x = 1$, $\therefore P(1, 0)$, $\therefore |PQ|_{\min} = \frac{|1 - 0 + 1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

故答案为: $(1, 0)$; $\sqrt{2}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 在点 $P(0, -2)$ 处的切线斜率为 -1 , 且在 $x = 1$ 处取得极值.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 当 $x \in [-1, 2]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最值.

【答案】(1) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 2$;

(2) $f(x)_{\min} = -3$, $f(x)_{\max} = 0$.

【解析】

【分析】(1) 利用导数的几何意义及点在曲线上, 结合函数极值的定义即可求解;

(2) 利用导数法求函数的最值的步骤即可求解.

【小问 1 详解】

因为 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$,

所以 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$,

由题意可知, $f(0) = -2$, $f'(0) = -1$, $f'(1) = 0$,

$$\text{所以} \begin{cases} f(0)=c=-2 \\ f'(0)=b=-1 \\ f'(1)=3+2a+b=0 \end{cases}, \text{解得 } a=-1, b=-1, c=-2,$$

所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=x^3-x^2-x-2$ ，经检验适合题意，

$$\text{所以 } f(x)=x^3-x^2-x-2;$$

【小问 2 详解】

$$\text{由 (1) 知 } f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1),$$

$$\text{令 } f'(x)=0, \text{ 则 } (3x+1)(x-1)=0, \text{ 解得 } x=-\frac{1}{3}, \text{ 或 } x=1,$$

$$\text{当 } x \in \left[-1, -\frac{1}{3}\right) \cup [1, 2] \text{ 时, } f'(x) > 0; \text{ 当 } x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right) \text{ 时, } f'(x) < 0;$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 在 } \left[-1, -\frac{1}{3}\right) \text{ 和 } [1, 2] \text{ 上单调递增, 在 } \left(-\frac{1}{3}, 1\right) \text{ 上单调递减,}$$

$$\text{当 } x=-\frac{1}{3} \text{ 时, } f(x) \text{ 取的极大值为 } f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}-2=-\frac{49}{27},$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } f(x) \text{ 取得极小值为 } f(1)=1^3-1^2-1-2=-3,$$

$$\text{又 } f(-1)=(-1)^3-(-1)^2-(-1)-2=-3, f(2)=2^3-2^2-2-2=0,$$

$$\text{所以 } f(x)_{\min}=-3, f(x)_{\max}=0.$$

18. 电影《夺冠》讲述了中国女排姑娘们顽强拼搏、为国争光的励志故事，现有 4 名男生和 3 名女生相约一起去观看该影片，他们的座位在同一排且连在一起。

- (1) 女生必须坐在一起的坐法有多少种？
- (2) 女生互不相邻的坐法有多少种？
- (3) 甲、乙两位同学相邻且都不与丙同学相邻的坐法有多少种？

【答案】(1) 720

(2) 1440

(3) 960

【解析】

【分析】(1) 采用捆绑法即可求解；

(2) 采用插空法即可求解；

(3) 先排甲、乙、丙以外的其他 4 人，再把甲、乙排好，最后把排好的甲、乙这个整体与丙分别插入原先排好的 4 人

的 5 个空挡中即可；

【小问 1 详解】

先将 3 个女生排在一起，有 A_3^3 种排法，将排好的女生视为一个整体，与 4 个男生进行排列，共有 A_5^5 种排法，由分步乘法计数原理，共有 $A_3^3 A_5^5 = 720$ (种) 排法；

【小问 2 详解】

先将 4 个男生排好，有 A_4^4 种排法，再在这 4 个男生之间及两头的 5 个空挡中插入 3 个女生有 A_5^3 种方法，故符合条件的排法共有 $A_4^4 A_5^3 = 1440$ (种)；

【小问 3 详解】

先排甲、乙、丙以外的其他 4 人，有 A_4^4 种排法，由于甲、乙相邻，故再把甲、乙排好，有 A_2^2 种排法，最后把排好的甲、乙这个整体与丙分别插入原先排好的 4 人的 5 个空挡中有 A_5^2 种排法，故符合条件的排法共有

$$A_4^4 A_2^2 A_5^2 = 960 \text{ (种)};$$

19. 用一张边长为 a 的正方形硬纸板，在四个角裁去边长为 x 的四个小正方形，再折叠成无盖方盒，当裁去的小正方形边长 x 发生变化时，纸盒的容积 V 会随之发生变化，问：

(1) 求 V 关于 x 的函数关系式；

(2) x 取何值时，容积 V 最大？最大值是多少？

【答案】(1) $V = x(a-2x)^2, x \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$

(2) 当 $x = \frac{a}{6}$ 时， $V_{\max} = \frac{2}{27}a^3$.

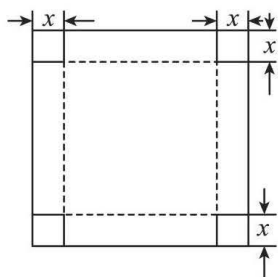
【解析】

【分析】(1) 由题意可得无盖方盒的底面为边长为 $a-2x$ 的正方形，高为 x ，再根据长方体的体积公式，即可得答案；

(2) 由 $V = x(a-2x)^2, x \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$ ，求导，利用导数确定 V 的单调区间，即可得最大值.

【小问 1 详解】

解：如图所示：



由题意可知，无盖方盒的底面为边长为 $a-2x$ 的正方形，高为 x ，

所以 $V = x(a-2x)^2$ ， $x \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$ ；

【小问 2 详解】

解：因为 $V = x(a-2x)^2$ ， $x \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$ ，

所以 $V' = (a-2x)^2 + 2x(a-2x) \cdot (-2) = 12x^2 - 8ax + a^2 = (2x-a)(6x-a)$ ， $x \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$ ；

令 $V' = 0$ ，则有 $x_1 = \frac{a}{2}$ ， $x_2 = \frac{a}{6}$ ，

所以当 $x \in \left(0, \frac{a}{6}\right)$ 时， $V' > 0$ ， V 单调递增；当 $x \in \left(\frac{a}{6}, \frac{a}{2}\right)$ 时， $V' < 0$ ， V 单调递减；

所以当 $x = \frac{a}{6}$ 时， $V_{\max} = \frac{2}{27}a^3$ 。

20. 已知 $f(x) = ax - \ln x$ ， $a \in \mathbb{R}$ 。

(1) 当 $a=1$ 时，求曲线 $f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程；

(2) 是否存在实数 a ，使 $f(x)$ 在区间 $(0, e]$ 的最小值是 3，若存在，求出 a 的值；若不存在，说明理由。

【答案】(1) $x - 2y + 2 - 2\ln 2 = 0$ ；(2) $a = e^2$ 。

【解析】

【详解】试题分析：(1) 根据导数几何意义得切线的斜率是 $f'(2)$ ，再根据点斜式求切线方程 (2) 先求导数，根据导函数零点情况分类讨论，确定对应函数单调性，进而确定最小值取法，最后根据最小值为 3，解出 a 的值

试题解析：(1) $\because f(x) = x - \ln x$ ， $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

$\therefore$ 切线的斜率是 $f'(2) = \frac{1}{2}$ ，又切点是 $(2, 2 - \ln 2)$

$\therefore$ 切线的方程是： $x - 2y + 2 - 2\ln 2 = 0$

(2) 假设存在实数 a ，使 $f(x) = ax - \ln x$ ($x \in (0, e]$) 有最小值 3，



$$f'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x}$$

①当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递减, $f(x)_{\min} = f(e) = ae - 1 = 3$,

$a = \frac{4}{e}$ (舍去), 所以, 此时 $f(x)$ 无最小值.

②当 $0 < \frac{1}{a} < e$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{a}, e]$ 上单调递增

$f(x)_{\min} = f(\frac{1}{a}) = 1 + \ln a = 3$, $a = e^2$, 满足条件.

③ 当 $\frac{1}{a} \geq e$ 时, $f(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递减, $f(x)_{\min} = f(e) = ae - 1 = 3$, $a = \frac{4}{e}$ (舍去), 所以, 此时 $f(x)$ 无最小值.

综上, 存在实数 $a = e^2$, 使得当 $x \in (0, e]$ 时 $f(x)$ 有最小值 3.

点睛: 利用导数解答函数最值的一般步骤: 第一步: 利用 $f'(x) > 0$ 或 $f'(x) < 0$ 求单调区间; 第二步: 解 $f'(x) = 0$

得两个根 x_1, x_2 ; 第三步: 比较两根同区间端点的大小; 第四步: 求极值; 第五步: 比较极值同端点值的大小.

21. 已知函数 $f(x) = (x-a)\ln x - x + a - 3 (a \in \mathbb{R})$

(1) 若 $a = 0$, 求 $f(x)$ 的极小值;

(2) 讨论函数 $f'(x)$ 的单调性;

(3) 当 $a = 2$ 时, $\lambda \leq f(x)$ 恒成立, 求 λ 的最大整数值.

【答案】(1) -4

(2) 答案见解析 (3) -4

【解析】

【分析】(1) 根据题意, 求导得 $f'(x)$, 然后即可得到 $f(x)$ 的极小值;

(2) 由题意得到 $f'(x)$, 令 $h(x) = \ln x - \frac{a}{x} (x > 0)$, 然后由 $h'(x)$ 的正负即可判断函数 $f'(x)$ 的单调性;

(3) 根据题意可得存在 $x_0 \in (2, 3)$ 使得 $f'(x_0) = 0$, 从而得到函数 $f(x)$ 的最小值, 从而得到结果.

【小问 1 详解】

当 $a = 0$ 时, $f(x) = x \ln x - x - 3$, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减; 在区间 $(1, +\infty)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增.

所以当 $x=1$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $f(1)=-4$.

【小问 2 详解】

$$f(x)=(x-a)\ln x-x+a-3 \text{ 的定义域为 } (0,+\infty), f'(x)=\ln x+\frac{x-a}{x}-1=\ln x-\frac{a}{x}.$$

$$\text{令 } h(x)=\ln x-\frac{a}{x}(x>0), h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}=\frac{x+a}{x^2},$$

当 $a \geq 0$ 时, $h'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $h(x)$ 即 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增.

当 $a < 0$ 时, $h(x)$ 在区间 $(0,-a)$, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 即 $f'(x)$ 递减;

在区间 $(-a,+\infty)$, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 即 $f'(x)$ 递增.

【小问 3 详解】

$$\text{当 } a=2 \text{ 时, } f(x)=(x-2)\ln x-x-1, f'(x)=\ln x-\frac{2}{x},$$

$$\text{由 (2) 知, } f'(x) \text{ 在 } (0,+\infty) \text{ 上递增, } f'(2)=\ln 2-1 < 0, f'(3)=\ln 3-\frac{2}{3} > 0,$$

$$\text{所以存在 } x_0 \in (2,3) \text{ 使得 } f'(x_0)=0, \text{ 即 } \ln x_0=\frac{2}{x_0}.$$

$f(x)$ 在区间 $(0, x_0)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减; 在区间 $(x_0, +\infty)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增.

所以当 $x=x_0$ 时, $f(x)$ 取得极小值也即是最小值为

$$f(x_0)=(x_0-2)\ln x_0-x_0-1=(x_0-2)\times\frac{2}{x_0}-x_0-1=1-\left(\frac{4}{x_0}+x_0\right),$$

$$\because x_0 \in (2,3), \therefore \frac{4}{x_0}+x_0 \in \left(4, \frac{13}{3}\right), \text{ 所以 } f(x_0) \in \left(-\frac{10}{3}, -3\right).$$

由 $\lambda \leq f(x)$ 恒成立, 得 $\lambda \leq f(x_0)$, 故 λ 的最大整数值为 -4 .

22. 已知函数 $f(x)=ae^x-x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a=\frac{1}{e}$ 时, 证明: $f(x)-\ln x+x-1 \geq 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立;

(2) 若 $f(x)$ 有 2 个零点, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) 证明见解析

$$(2) \left(0, \frac{1}{e}\right)$$

【解析】

【分析】(1) 设 $g(x) = f(x) - \ln x + x - 1$, 对函数 $g(x)$ 求导得 $g'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x} (x > 0)$, 根据指数函数和幂函数的性质知函数 $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增且 $g'(1) = 0$, 结合导数研究函数 $g(x)$ 的单调性求出 $g(x)_{\min} = 0$ 即可;

(2) 函数 $f(x)$ 有 2 个零点等价于函数 $h(x) = \frac{x}{e^x}$ 与 $y = a$ 的图象有 2 个交点, 利用导数讨论函数 $h(x)$ 的单调性, 结合图形即可求解.

【小问 1 详解】

当 $a = \frac{1}{e}$ 时, 设 $g(x) = f(x) - \ln x + x - 1 = e^{x-1} - \ln x - 1$,

则 $g'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x} (x > 0)$, 设 $u(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x} (x > 0)$,

由函数 $y = e^{x-1}$ 和 $y = \frac{-1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

知函数 $u(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $u(1) = g'(1) = e^0 - 1 = 0$,

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, 即 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, 即 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x)_{\min} = g(1) = 0$

即 $f(x) - \ln x + x - 1 \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立;

【小问 2 详解】

由 $f(x) = ae^x - x = 0$, 得 $a = \frac{x}{e^x}$, 令 $h(x) = \frac{x}{e^x}$,

则 $f(x)$ 有 2 个零点, 等价于函数 $y = h(x)$ 与 $y = a$ 的图象有 2 个交点,

令 $h'(x) = \frac{1-x}{e^x} = 0$, 得 $x = 1$,

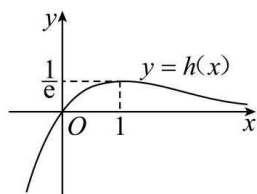
当 $x \in (-\infty, 1)$ 时 $h'(x) > 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时 $h'(x) < 0$,

则函数 $h(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

故 $h(x)_{\max} = h(1) = \frac{1}{e}$, 且当 $x < 0$ 时, $h(x) < 0$,

当 x 趋向于正无穷时, $y = e^x$ 趋向于正无穷的速率远远比 $y = x$ 大, 故 $h(x)$ 趋向于 0,

作出函数 $h(x)$ 的大致图象如下:



结合图象可知，当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时， $h(x) = \frac{x}{e^x}$ 与 $y = a$ 的图象有 2 个交点，

故 a 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线