2023 年哈三中高三学年

第五次高考模拟考试 数学 试卷答案

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	D	C	C	A	D	B	AD	BC	ACD	ABD

二、填空题：

13. $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　14. 4046　　15. 1　　16. 2　6000

三、解答题：

17. （1）$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}}{2a_n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2a_n}$，$\dfrac{1}{a_{n+1}}-1=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_n}-1\right)$

$a_1=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1}{a_1}-1=\dfrac{1}{2}$

$\left\{\dfrac{1}{a_1}-1\right\}$是以$\dfrac{1}{2}$为首项，$\dfrac{1}{2}$为公比的等比数列

（2）由（1）：$\dfrac{1}{a_{n+1}}-1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，$\dfrac{1}{a_n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+1$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=n+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=n+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$b_n=n+1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$f\left(x\right)=x+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 在 $\left(1,+\infty\right)\nearrow \therefore \left\{b_n\right\}$ 单调递增

$\therefore n\le 99$

18. （1）证明：在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\because AB=BC,\therefore BD\perp AC$．

又 $AA_1\perp$ 面 $ABCD$，$BD\subset$ 面 $ABCD$，$\therefore AA_1\perp BD$．$\because AC\cap AA_1=A$，且 $AC,AA_1\subset$ 面 AA_1C_1C，

$\therefore BD\perp$ 面 AA_1C_1C，$\because BD\subset$ 面 BDP，$\therefore$ 平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 BDP

（2）以 D 为原点，分别以 DA,DC,DD_1 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系.

设 $CC_1=3,\therefore AB=6$，$\therefore D(0,0,0),B(6,6,0),E(0,6,1)$．设点 $P(0,a,3),0\le a\le 6$．

设面 BDE 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$．

$\vec{DB}=(6,6,0),\vec{DB}\cdot\vec{m}=6x+6y=0$．$\vec{DE}=(0,6,1),\vec{DE}\cdot\vec{m}=6y+z=0$．

令 $x=1,\therefore y=-1,z=6,\therefore \vec{m}=(1,-1,6)$．

设面 PBD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$．

$\vec{DB}=(6,6,0),\vec{DB}\cdot\vec{n}=6x+6y=0$．$\vec{DP}=(0,a,3),\vec{DP}\cdot\vec{n}=ay+3z=0$．

令 $x=3,\therefore y=-3,z=a,\therefore \vec{n}=(3,-3,a)$．

$\therefore \frac{6\sqrt{2}}{19}=\left|\cos<\vec{m},\vec{n}>\right|=\frac{|6+6a|}{\sqrt{38}\sqrt{a^2+18}}.\therefore 15a^2+38a-53=0$，$\therefore a=1$ 或 $-\frac{53}{15}.\because 0\le a\le 6.\therefore a=1$.

$\therefore$ 点 P 为棱 C_1D_1 上靠近点 D_1 的第一个六等分点时，面 BDE 与面 PBD 夹角的余弦值为 $\frac{6\sqrt{2}}{19}$.

19.（1）由余弦定理：$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,$a^2-2c^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$\therefore\ 3c^2=2ac\cos B,3c=2a\cos B$

由正弦定理：$3\sin C=2\sin A\cos B$

$3\sin(A+B)=2\sin A\cos B$,化简得：$3\cos A\sin B=-\sin A\cos B$

$\therefore\ 3\tan B=-\tan A\ \therefore\ \dfrac{\tan A}{\tan B}=-3$.

（2）$\tan C=-\tan(A+B)=-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$, 由（1）知 $\tan A=-3\tan B$

$\therefore\ \tan C=\dfrac{2\tan B}{1+3\tan^2 B}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\tan B}+3\tan B}$

$\because b^2=a^2-2c^2<a^2$, 即 $b<a$

$\therefore\ B$ 为锐角, $\tan B>0$

$\therefore\ \dfrac{1}{\tan B}+3\tan B\geq 2\sqrt{3}$

$\therefore\ \tan C\leq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

20. (1)设 $B=$“任取一零件为次品”, $A_i=$“零件为第 i 台车床加工” ($i=1,2,3$) ,则

$\Omega=A_1\cup A_2\cup A_3$,且 A_1, A_2 , A_3 两两互斥,根据题意得

$P(A_1)=0.25,\ P(A_2)=0.3,\ P(A_3)=0.45,$

$P(B|A_1)=0.06,P(B|A_2\quad =P(B\quad A_3\quad =$

由全概率公式,得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)\\&=0.25\times0.06+0.3\times0.05+0.45\times0.05\\&=0.0525.\end{aligned}$$

(2) “求次品为第 1 台车床所加工的概率”,就是计算在 B 发生的条件下,事件 A_1 发生的概率.

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.25\times 0.06}{0.0525}=\frac{2}{7}.$$

(3) 类似(2),可得

$$P(A_2|B)=\frac{2}{7},P(A_3|B)=\frac{3}{7}.$$

故第 1,2 台车床操作员应承担$\frac{2}{7}$,第 3 台车床操作员应承担$\frac{3}{7}$.

21.(1)由已知，$a=2$，$c=\sqrt{3}$，则$b=1$，则有$C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

(2)由于直线l不能与y轴垂直，故设$l:x=my+\sqrt{3}$，

$\begin{cases}x^2+4y^2=4\\x=my+\sqrt{3}\end{cases}$，代入可得$\left(m^2+4\right)y^2+2\sqrt{3}my-1=0$

$\Delta=16\left(m^2+1\right)>0$恒成立，设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，

则有$y_1+y_2=\frac{-2\sqrt{3}m}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-1}{m^2+4}$

$$|AB|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2}=\frac{4\left(m^2+1\right)}{m^2+4}$$

点O到直线l的距离为$d=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+m^2}}$

所以$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=2\sqrt{3}\frac{\sqrt{1+m^2}}{m^2+4}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{m^2+1}+\frac{3}{\sqrt{m^2+1}}}\leq 1$

当且仅当：$m=\pm\sqrt{2}$时取最大值；

(3)设直线MB的方程为$x=ny+t$

$\begin{cases}x^2+4y^2-4=0\\x=ny+t\end{cases}$，代入可得$\left(n^2+4\right)y^2+2nty+t^2-4=0$

$\Delta=4\left(n^2-t^2-4\right)>0$，可设 $B\left(x_2,y_2\right)$、$M\left(x_3,y_3\right)$

则有 $y_2+y_3=\dfrac{-2nt}{n^2+4}$，$y_2y_3=\dfrac{t^2-4}{n^2+4}$

由于 $k_{MA_1}\cdot k_{MA_2}=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{1}{4}$ 且 $k_{BA_2}=2k_{MA_1}$

可得 $k_{MA_2}\cdot k_{BA_2}=-\dfrac{1}{2}$

即 $\dfrac{y_2}{x_2-2}\cdot\dfrac{y_3}{x_3-2}=-\dfrac{1}{2}$，即 $\left(n^2+2\right)y_2y_3+n\left(t-2\right)\left(y_2+y_3\right)+\left(t-2\right)^2=0$

即 $\dfrac{\left(n^2+2\right)\left(t^2-4\right)}{n^2+4}+\dfrac{-2n^2t\left(t-2\right)}{n^2+4}+\left(t-2\right)^2=0$

由于 $t-2\neq 0$，化简得 $t=\dfrac{2}{3}$，即直线 MB 恒过定点 $\left(\dfrac{2}{3},0\right)$

22. (1)令 $h(x)=a\cos 2x-\dfrac{2}{1+2x},h(0)=a-2$

当 $x\in(-\dfrac{1}{2},0)$ 时,$\dfrac{2}{1+2x}>2,0<\cos 2x<1$

若 $a\le 2$,则 $h(x)<2-\dfrac{2}{1+2x}<0$,此时无解

若 $a>2,h'(x)=-2a\sin 2x+\dfrac{4}{(1+2x)^2}$,当 $-\dfrac{1}{2}<x<0$ 时,$h'(x)>0$,

则 $h(x)$ 在 $(-\dfrac{1}{2},0)$ 上为单调递增函数，而 $h(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2})=a\cos(\dfrac{2}{a}-1)-a<0,h(0)=a-2>0$,

所以存在 $m\in(-1,0)$,使 $h(m)=0$,方程有且只有一个解,综上,$a>2$.

(2)由(1)知 $f'(x)=a\cos 2x-\dfrac{2}{1+2x}=h(x)$,且 $a>2$

在 $(0,\dfrac{\pi}{4})$ 上,$h'(x)$ 为单调递减函数,

又 $h'(0)=4,\ h'(\frac{\pi}{4})=-2a+\frac{4}{(1+\frac{\pi}{2})^2}<0$,

所以存在 $k\in(0,\frac{\pi}{4}),h'(k)=0$, 在 $(0,k)$ 上 $h'(x)>0$, 在 $(k,\frac{\pi}{4})$ 上, $h'(x)<0$

可得 $h(x)$ 在 $(0,k)$ 上为单调递增函数,在 $(k,\frac{\pi}{4})$ 上为单调递减函数

又 $h(0)=a-2>0$, 所以由 $h(k)>0$, 又 $h(\frac{\pi}{4})=-\frac{2}{1+\frac{\pi}{2}}<0$

所以 $h(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上存在唯一零点 x_0 ,当 $0<x<x_0$ 时 $h(x)>0$,当 $x_0<x<\frac{\pi}{4}$ 时, $h(x)<0$,而当 $\frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{2}$ 时, $h(x)<0$,

$f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上有唯一极大值点, $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增,在 $(x_0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减,

又 $f'(0)=0$,所以 $f(x_0)>0,f(\frac{\pi}{2})=-\ln(1+\pi)<0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上有唯一零点 x_1 .

(3)先证明: $2x_0>x_1$,因为 $2x_0,x_1\in(x_0,\frac{\pi}{2})$,所以只需证明 $f(2x_0)<f(x_1)=0$

$f(2x_0)=\frac{a}{2}\sin 4x_0-\ln(1+2x_0)$,由(2)知 $a=\frac{2}{(1+2x_0)\cos 2x_0}$

所以 $f(2x_0)=\frac{\sin 4x_0}{(1+2x_0)\cos 2x_0}-\ln(1+4x_0)=\frac{2\sin 2x_0}{1+2x_0}-\ln(1+4x_0)$

可以证明: $2x_0>\sin 2x_0$,得 $f(2x_0)<\frac{4x_0}{1+2x_0}-\ln(1+4x_0)$,

令 $\varphi(x)=\frac{4x}{1+2x}-\ln(1+4x)$,

$\varphi'(x)=\frac{-16x^2}{(1+2x)^2(1+4x)}<0$,所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为单调递减函数,

所以 $\varphi(x)<\varphi(0)=0$,于是 $f(2x_0)<0$,所以 $2x_0>x_1$

于是 $\cos 2x_0 < \cos x_1$,又 $\cos 2x_0 = \dfrac{2}{(1+2\ {}_{0})a}$,

所以有 $\dfrac{2}{(1+2x_0)a} < \cos x_1$,又 $(1+2x_0)a > 0$,

所以有 $a(1+2x_0)\cos x_1 > 2$.

自主选拔在线 微信号：zizzsw
自主选拔在线 微信号：zizzsw
自主选拔在线 微信号：zizzsw