高三数学试题参考答案及评分标准

一、单项选择题（每小题 5 分，共 40 分）

1. B 2. A 3. D 4. B 5. C 6. C 7. B 8. B

二、多项选择题（每小题 5 分，共 20 分）

9. AC 10. ABD 11. BD 12. ABC

三、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13. -1 14. $x=2$ 或 $5x+12y-26=0$（写出一条即可）

15. $0<d<3$ 16. $(-\frac{\sqrt{3}}{9},0)\cup(0,\frac{\sqrt{3}}{9})$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

17. 解：（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 $d\neq 0$，$\because a_1=1$，且 a_1,a_3,a_{13} 成等比数列，

$\therefore a_3^2=a_1a_{13}$，即 $(1+2d)^2=1+12d$，解得 $d=2$，$d=0$（舍去），

从而 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$ .... 2 分

$\because$ 数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $S_n=2b_n-2$，

当 $n=1$ 时，$b_1=2b_1-2, \therefore b_1=2$

当 $n\geq 2$ 时，$b_n=S_n-S_{n-1}=2b_n-2b_{n-1}$，$\therefore b_n=2b_{n-1}$，

即数列$\{b_n\}$是公比为 2 的等比数列，

$\therefore b_n=2^n$ .... 4 分

（2）$c_n=b_n-a_n=2^n-(2n-1)$ $\therefore T_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-\frac{n(1+2n-1)}{2}=2^{n+1}-2-n^2$

$\therefore T_n+n^2-n=2^{n+1}-n-2$ .... 7 分

令 $f(n)=2^{n+1}-n-2$，$\therefore f(n+1)-f(n)=2^{n+2}-(n+1)-2^{n+1}+n=2^{n+1}-1>0$

$\therefore f(n)$ 单调递增，$\therefore f(n)_{\min}=f(1)=1$ .... 9 分

$\therefore \log_2(1-a)<1$, $\therefore 0<1-a<2$, $\therefore -1<a<1$. .... 10 分

18．由题意可得 $0.004+0.002+0.005+0.010+a+0.015+0.016+0.018+a+0.04=0.1$，

故 $a=0.013$ .... 2 分

记“该市市民的压力分值在区间 $[70,100]$”为事件 C，

则 $P(C)=(0.018+0.013+0.004)\times 10=0.35$ .... 4 分

（1）$\bar{x}=(5\times 0.004+15\times 0.002+25\times 0.005+35\times 0.01+45\times 0.013+55\times 0.016+65\times 0.015$

$+75\times 0.018+85\times 0.013+95\times 0.004)\times 10=58$ .... 7 分

（2）由（1）可知高压市民有 $200\times 0.35=70$ 人，年龄段 A 的人数有 35 人，年龄段 B 的人数为 35 人,故（浙睿talk）表格如下：

压力	高压市民	非高压市民
年龄段A	35	25
年龄段B	35	105

.... 9 分

零假设 H_0：该市高压市民与其年龄在在 30 岁到 50 岁无关，

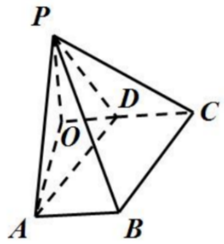
$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{200(35\times 105-35\times 25)^2}{60\times 140\times 70\times 130}=\frac{800}{39}>20=10.828$$，.. 11 分

因此，有 99.9% 的把握认为该市“高压市民”与其年龄在 30 岁到 50 岁有关．... 12 分

19.（1）H 为 AP 的中点，又因为 $PD=AD$，所以 $AP\perp HD$，又 $AB\perp AP$，$AB\parallel CD$

所以 $AP\perp CD$，$HD\cap CD=D, HD,CD\subset$ 面 HCD，所以 $AP\perp$ 面 HCD... 5 分

（2）过点 P 作 $PO\perp CD$ 交 CD 延长线于 O，连接 OA，因为面 $PCD\perp$ 面 $ABCD$，所以 $PO\perp$ 面 $ABCD$，$AO\perp AB$，$\Delta POD\cong\Delta AOD$ 可得 $PO=OA=2$，面 PAB 与面 PCD 的交线为 l，$l\parallel AB\parallel CD$，所以 $\angle APO$ 即为面 PAB 与面 PCD 的夹角，



$\angle APO=\frac{\pi}{4}$，所以 $\cos\angle APO=\frac{\sqrt{2}}{2}$，面 PAB 与面 PCD 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .... 12 分

20．由 $A+B+C=\pi$，故 $A=\pi-B-C$，故............ 1 分

$\sin\dfrac{A-B}{2}=\sin\dfrac{\pi-2B-C}{2}=\cos(B+\dfrac{C}{2})=\cos B\cos\dfrac{C}{2}-\sin B\sin\dfrac{C}{2}$，............ 2 分

$2\sin\dfrac{C}{2}\cos(B+\dfrac{\pi}{6})=2\sin\dfrac{C}{2}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B-\dfrac{1}{2}\sin B)=\sqrt{3}\sin\dfrac{C}{2}\cos B-\sin B\sin\dfrac{C}{2}$，.......... 3 分

故 $\sqrt{3}\sin\dfrac{C}{2}\cos B=\cos B\cos\dfrac{C}{2}$，因△ ABC 是锐角三角形，故 $\cos B\neq 0$，.......... 5 分

故 $\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故 $\dfrac{C}{2}=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$.......... 6 分

(2)由正弦定理可知 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2\sqrt{3}$，故 $a=2\sqrt{3}\sin A, b=2\sqrt{3}\sin B$，......... 7 分

$a+b+c=3+2\sqrt{3}\sin A+2\sqrt{3}\sin B=3+2\sqrt{3}\sin A+2\sqrt{3}\sin(A+C)$

$=3+2\sqrt{3}\sin A+2\sqrt{3}(\sin A\cos C+\cos A\sin C)$．

$=3+3\sqrt{3}\sin A+3\cos A=3+6\sin(A+\dfrac{\pi}{6})$ .... 9 分

由△ ABC 是锐角三角形，可知 $\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2}\\0<B<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow A\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2})$，

故 $A+\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3})$，............ 11 分

故 $a+b+c\in(3+3\sqrt{3},9]$............ 12 分

21．（1）由题知 C_1 过点 $\left(\sqrt{6},-2\right)$，则 $\begin{cases}e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{6}{b^2}=1\\a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=4\\b=2\sqrt{2}\end{cases}$，

$\therefore C_1:\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{8}=1$....... 4 分

（2）设直线 AB 的方程为 $y=kx+m\left(m>0\right)$，$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，

联立 $\begin{cases}y=kx+m\\x^2=8y\end{cases}$，得 $x^2-8kx-8m=0$，

$x_1+x_2=8k$，$x_1x_2=-8m$，$\Delta=64k^2+32m>0$…….. 5 分

以 A 为切点的切线方程为 $y-y_1=\frac{x_1}{4}\left(x-x_1\right)$，即 $y=\frac{x_1}{4}x-\frac{x_1^2}{8}$，$\therefore M\left(\frac{x_1}{2},0\right)$

同理以 B 为切点的切线为 $y=\frac{x_2}{4}x-\frac{x_2^2}{8}$，$\therefore N\left(\frac{x_1}{2},0\right)$…….. 6 分

由 $\begin{cases}y=\frac{x_1}{4}x-\frac{x_1^2}{8}\\y=\frac{x_2}{4}x-\frac{x_2^2}{8}\end{cases}$，故两式做差整理得：$\left(\frac{x_1}{4}-\frac{x_2}{4}\right)x=\frac{x_1^2}{8}-\frac{x_2^2}{8}$，所以 $x=\frac{x_1+x_2}{2}=4k$，两式

求和整理得：$2y=\frac{x_1+x_2}{4}x-\frac{x_1^2+x_2^2}{8}=\frac{x_1+x_2}{4}x-\frac{\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2}{8}=\frac{x_1x_2}{4}=-2m$，

所以点 $P\left(4k,-m\right)$，$\because P$ 在椭圆上，$\therefore \frac{m^2}{16}+2k^2=1$，$\therefore m\in\left(0,4\right]$…….. 8 分

$S=S_{\Delta ABP}-S_{\Delta MNP}=\frac{1}{2}\left|\frac{4k^2+2m}{\sqrt{k^2+1}}\right|\cdot\sqrt{k^2+1}\left|x_1-x_2\right|-\frac{1}{2}\left|m\right|\left|\frac{1}{2}\left(x_1-x_2\right)\right|$

$=\left(2k^2+\frac{3}{4}m\right)\left|x_1-x_2\right|=8\left(k^2+3m\right)\sqrt{4k^2+2m}$

$=\left(-\frac{m^2}{4}+3m+4\right)\sqrt{-\frac{m^2}{8}+2m+2}$…….. 10 分

此函数在 $m\in(0,4]$ 上递增，$S\in\left(4\sqrt{2},24\sqrt{2}\right]$…….. 12 分

法二：设 $A\left(4m,2m^2\right)(m>0)$，$B\left(4n,2n^2\right)(n>0)$，

$$\begin{cases} l_{AP}: y=m\left(x-4m\right)+2m^2 \\ l_{BP}: y=-n\left(x-4m\right)+2n^2 \end{cases}$$

$\therefore M\left(2m,0\right),N\left(-2n,0\right),P\left(2m-2n,-2mn\right)$ .... 6 分

$\because P$在椭圆上 $\therefore \dfrac{m^2n^2}{4}+\dfrac{\left(m-n\right)^2}{2}=1,$

$l_{AB}: y=\dfrac{m-n}{2}\left(x-4m\right)+2m^2=\dfrac{m-n}{2}x+2mn$ .... 7 分

$$S=S_{\Delta ABP}-S_{\Delta MNP}=\frac{1}{2}\times 4\left(m-n\right)\left[\left(m-n\right)^2+4mn\right]-\frac{1}{2}\times 2\left(m+n\right)\times 2mn$$

$$S=2\left(m+n\right)\left[\left(m+n\right)^2-mn\right]$$

$\because \dfrac{m^2n^2}{4}+\dfrac{\left(m-n\right)^2}{2}=1, \therefore \left(m+n\right)^2=-\dfrac{m^2n^2}{2}+4mn+2$ .... 10 分

设 $mn=t, t\in(0,2]$，则 $S=\sqrt{-2t^2+16t+8}\left(-\dfrac{t^2}{2}+3t+2\right)\in\left(4\sqrt{2},24\sqrt{2}\right]$.... 12 分

22. 解：（1）$\because f'(x)=\dfrac{ae^x(x-1)}{x^2}+\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{(ae^x-x)(x-1)}{x^2}$

$\therefore a=\dfrac{x}{e^x}\ (x>0)$ 有两个不等根

令 $g(x)=\dfrac{x}{e^x}\ (x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}>0\Rightarrow x<1$

$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，$[1,+\infty)$ 上单调递减，且 $g_{\max}=g(1)=\dfrac{1}{e}$

$\therefore 0<a<\dfrac{1}{e}$ .... 3 分

（2）由（1）知，$x_2=1$，x_1,x_3 是 $\dfrac{x}{e^x}-a=0$ 的两个根

先证 $x_1+x_3>2\Leftrightarrow x_3>2-x_1\Leftrightarrow g(x_3)<g(2-x_1)\Leftrightarrow g(x_1)<g(2-x_1)$

令 $h(x)=g(x)-g(2-x)(0<x<1)$，则

$h'(x)=g'(x)+g'(2-x)=\dfrac{(x-1)(e^{2x-2}-1)}{e^{x}}>0$

$\therefore h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增　　$\therefore h(x)<h(1)=0$

$\therefore g(x)<g(2-x)(0<x<1)$　　　又 $0<x_1<1$　　$\therefore g(x_1)<g(2-x_1)$　得证

…………………………………………………………… 6 分

（3）因为 $\dfrac{x_1}{e^{x_1}}=\dfrac{x_2}{e^{x_2}}=a$，所以 $\dfrac{e^{x_1}}{x_1}=\dfrac{e^{x_2}}{x_2}=\dfrac{1}{a}$，

$\ln x_1-x_1=\ln x_2-x_2=\ln a$

所以 $f(x_1)=f(x_3)=1+\ln a$

要证 $\dfrac{f(x_3)}{x_1}+\dfrac{f(x_1)}{x_3}>\dfrac{-2}{a^3e^4}$

即证：$(1+\ln a)(\dfrac{x_1+x_3}{x_1x_3})>\dfrac{-2}{a^3e^4}$，又因为 $x_1x_3=a^2e^{x_1+x_3}$

即证：$a(1+\ln a)(\dfrac{x_1+x_3}{e^{x_1+x_3}})>\dfrac{-2}{e^4}$………………………………… 8 分

令 $g(a)=a(1+\ln a),a\in(0,\dfrac{1}{e})$，$g'(a)=2+\ln a$

所以 $a\in(0,\dfrac{1}{e^2}),g(a)$ 单调递减，$a\in(\dfrac{1}{e^2},\dfrac{1}{e}),g(a)$ 单调递（浙睿talk）增，

$g(\dfrac{1}{e^2})\le g(a)<0,$ 即 $-\dfrac{1}{e^2}\le g(a)<0$ ……………………………… 10 分

令 $x_1+x_3=t\in(2,+\infty)$

$h(t)=\dfrac{t}{e^t},t\in(2,+\infty)$，$h'(t)=\dfrac{1-t}{e^t},t\in(2,+\infty)$ 时，h(t) 单调递减

所以 $0<h(t)<2$

所以 $g(a)h(t)>\dfrac{-2}{e^4}$，即 $a(1+\ln a)(\dfrac{x_1+x_3}{e^{x_1+x_3}})>\dfrac{-2}{e^4}$，即 $\dfrac{f(x_3)}{x_1}+\dfrac{f(x_1)}{x_3}>\dfrac{-2}{a^3e^4}$ 成立.

…………………………………………………………… 12 分