参考答案及解析

数学(三)

一、选择题

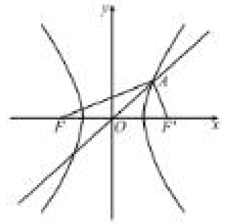
1. C 【解析】由题可得 $z=\frac{6-i}{2-i}=\frac{(6-i)(2+i)}{5}=\frac{13}{5}+\frac{4}{5}i$，所以 $\bar{z}=\frac{13}{5}-\frac{4}{5}i$. 故选 C.

2. B 【解析】由题意得集合 $A=(-a,4-a)$，$B=\{x|x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant1\}$，又 $A\cup B=\mathbf{R}$，所以 $\begin{cases}-a\leqslant-1\\4-a\geqslant1\end{cases}$，解得 $1\leqslant a\leqslant3$. 故选 B.

3. C 【解析】设该建筑的母线长为 x，高为 h，则由其侧面积为 $8\pi\sqrt{229}\ \mathrm{m}^2$，可得 $\frac{1}{2}\pi\times8x=8\pi\sqrt{229}$，解得 $x=2\sqrt{229}$ m，所以 $h=\sqrt{x^2-4^2}=30$ m. 故选 C.

4. D 【解析】由 $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)>0$，得 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$. 由复合函数的单调性可知，$f(x)$ 的单调递增区间即为函数 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上的单调递减区间，令 $2k\pi<x-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$. 故选 D.

5. A 【解析】设双曲线 C 的右焦点为 F'，由题意可得 $a=4$，$b=3$，$c=\sqrt{a^2+b^2}=5$，连接 AF'，若 $\triangle OAF$ 为等腰三角形，则 $|OF|=|OA|$（线段 OF 与 AF 显然不相等），所以 $|OA|=\frac{1}{2}|FF'|$，又 O 为 FF' 的中点，所以 $AF\perp AF'$，所以 $|AF|^2+|AF'|^2=|FF'|^2=100$. 由双曲线的定义得 $|AF|-|AF'|=8$，所以 $|AF|\cdot|AF'|=\frac{1}{2}[|AF|^2+|AF'|^2-(|AF|-|AF'|)^2]=18$，设点 A 到 x 轴的距离为 h，则 $h=\frac{|AF|\cdot|AF'|}{|FF'|}=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}$. 故选 A.

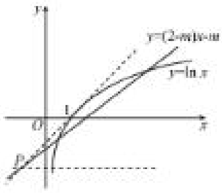


6. A 【解析】由题意可得 $\frac{\sin\alpha(1-\sin2\alpha)}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha)}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)=\frac{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha-\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2}{5}$，解得 $\tan\alpha=2$ 或 $-\frac{1}{3}$（舍），因为 α 是直角三角形中较大的锐角，所以 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，直角三角形的直角边分别为 $a\sin\alpha$，$a\cos\alpha$，则 $b=a\sin\alpha-a\cos\alpha$，所以 $\frac{b}{a}=\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 A.

7. D 【解析】依题意可得，事件甲的概率 $P_1=\frac{2}{5}$，事件乙的概率 $P_2=\frac{2}{5}$，有放回地取扑克牌两次的试验的基本事件总数是 $5^2=25$，显然事件丙与丁是对立事件，两次取出的扑克牌花色相同包含的基本事件数为 $1^2+2^2+2^2=9$，则事件丙的概率 $P_3=\frac{9}{25}$，事件丁的概率 $P_4=\frac{16}{25}$. 对于 A，事件乙与丙同时发生所包含的基本事件数为 4，其概率 $P_5=\frac{4}{25}\neq P_2\cdot P_3$，故乙与丙不相互独立，A 错误；对于 B，事件乙与丁同时发生所包含的基本事件数为 6，其概率 $P_6=\frac{6}{25}\neq P_2\cdot P_4$，故乙与丁不相互独立，B 错误；对于 C，事件甲与丙同时发生所包含的基本事件数为 4，其概率 $P_7=\frac{4}{25}\neq P_1\cdot P_3$，故甲与丙不相互独立，C 错误；对于 D，事件甲

与乙同时发生所包含的基本事件数为4，其概率 $P_3=\frac{4}{25}=P_1\cdot P_2$，故甲与乙相互独立，D正确．故选D．

8．B 【解析】$f(x)=(2-m)x-\ln x-m$ 有两个零点，即 $\ln x=(2-m)x-m$ 有两个正实根，即函数 $y=\ln x$ 与 $y=(2-m)x-m$ 的图象有2个交点．直线 $y=(2-m)x-m$ 过定点 $P(-1,-2)$，当该直线与曲线 $y=\ln x$ 相切时，设切点为 (x_0,y_0)，又 $y'=\frac{1}{x}$，则 $\frac{1}{x_0}=\frac{\ln x_0+2}{x_0+1}$，即 $\ln x_0-\frac{1}{x_0}+1=0$，令 $g(x)=\ln x-\frac{1}{x}+1$，$x>0$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $g(1)=0$，故 $g(x)$ 有唯一零点 $x=1$，故 $x_0=1$，所以当直线 $y=(2-m)x-m$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切时，切点为 $(1,0)$，则切线斜率为1．要使函数 $y=\ln x$ 与 $y=(2-m)x-m$ 的图象有2个交点，则需满足 $0<2-m<1$，所以 $1<m<2$．故选B．

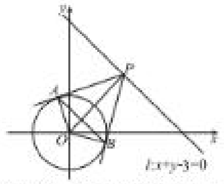


二、选择题

9．AD 【解析】A显然正确；$b_2=2b_1+2\,024$，故B错误；$c_2=2c_1$，故C错误；$d_2=(2x_{\max}+2\,024)-(2x_{\min}+2\,024)=2(x_{\max}-x_{\min})=2d_1$，故D正确．故选AD．

10．ABD 【解析】$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$，A正确；$\boldsymbol{m}^2+\boldsymbol{n}^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\beta+\sin^2\beta=2$，B正确；若 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，则 $\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta=0$，即 $\sin(\alpha+\beta)=0$，所以 $\alpha+\beta=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，C错误；$|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|^2=\boldsymbol{m}^2+\boldsymbol{n}^2+2\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2+2\cos(\alpha+\beta)\leqslant4$，所以 $|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|\leqslant2$，D正确．故选ABD．

11．BD 【解析】圆心 $O(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|0+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，∴点A到直线 l 的距离的取值范围为 $\left[\frac{3\sqrt{2}}{2}-1,\frac{3\sqrt{2}}{2}+1\right]$，∵$\frac{3\sqrt{2}}{2}-1<\frac{3}{2}$，$\frac{3\sqrt{2}}{2}+1<\frac{7}{2}$，∴点A到直线 l 的距离小于 $\frac{7}{2}$，但不一定大于 $\frac{3}{2}$，故A错误，B正确；如图，

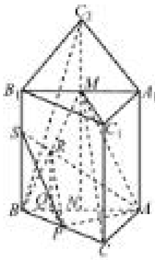


当直线 PA，PB 均与圆 O 相切，且 $OP\perp l$ 时，$\angle APB$ 最大，此时 $|OP|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，∴$\sin\angle APO=\frac{|OA|}{|OP|}=\frac{\sqrt{2}}{3}<\sin45°$，∴$\angle APO<45°$，∴$\angle APB=2\angle APO<90°$，即不存在点 P，A，B，使得 $\angle APB=90°$，C错误；设点 $P(a,3-a)$，A，B 是以线段 PO 为直径的圆上的两点，圆的方程为 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3-a}{2}\right)^2=\frac{a^2+(3-a)^2}{4}$，即 $x^2+y^2-ax-(3-a)y=0$，又 A，B 在圆 O：$x^2+y^2=1$ 上，∴直线 AB 的方程为 $ax+(3-a)y=1$，过定点 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，D正确．故选BD．

12．AC 【解析】由题意可知 $V_{B-C_1AM}=V_{C_1-ABM}$，设点 C_1 到平面 ABM 的距离为 d，易知平面 $A_1B_1C_1\perp$ 平面 ABB_1A_1，所以点 C_1 到平面 ABM 的距离等于点 C_1 到线段 A_1B_1 的距离，又 $A_1B_1=A_1C_1=B_1C_1=1$，所以 $d=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $V_{B-C_1AM}=V_{C_1-ABM}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABM}\cdot d=\frac{1}{6}AB\cdot AA_1\cdot d=\frac{1}{6}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}$，为定值，A正确；将 $\triangle A_1B_1C_1$ 沿 A_1B_1 展开与正方形 ABB_1A_1 在同一个平面内，记此时与 C_1 对应的点为 C_2，则当 B，M，C_2 三点共线时，C_1M+BM 取得最小值，即 BC_2，$BC_2=\sqrt{BB_1^2+B_1C_2^2-2BB_1\cdot B_1C_2\cos150°}=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，故 C_1M+BM 的最小值为 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，B错误；由点 R，P 分别为 BM，BC 的中点，得 $PR/\!/CM$，又 $PR\subset$ 平面 PQR，$CM\not\subset$ 平面 PQR，所以 $CM/\!/$ 平面 PQR，C正确；连接 AR 并延长交 BB_1 于点 S，连接 PS，则过点 P，A，R 的平面截正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 所得截面图形为 $\triangle PAS$，因为 $AP\perp BC$，平面 $CBB_1C_1\perp$ 平面 ABC，平面 $CBB_1C_1\cap$ 平面 $ABC=BC$，$AP\subset$ 平面 ABC，所以 $AP\perp$ 平面 CBB_1C_1，又 $PS\subset$ 平面 CBB_1C_1，所以 $AP\perp PS$，取 AB 的中点 N，连接 MN，则点 Q 为 BN 的中点，又点 R 为 BM 的中点，所以 $QR/\!/MN$，$QR=\frac{1}{2}MN$，当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，点 M 为 A_1B_1 的中点，所以 $MN/\!/BS$，所以 $QR/\!/BS$，所以 $\frac{QR}{BS}=\frac{AQ}{AB}=\frac{3}{4}$，所以 $BS=\frac{4}{3}QR$

$=\frac{2}{3}MN=\frac{2}{3}$，所以 $PS=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{4}}=\frac{5}{6}$，故 $S_{\triangle PAS}=\frac{1}{2}AP\cdot PS=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{5}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{24}$，D 错误.

故选 AC.



三、填空题

13. 2 【解析】由已知得 $f(-x)=f(x)$，所以 $(-x)^2-m(-x)+4=x^2-mx+4$，解得 $m=0$，且定义域 $[-2-n,2n]$ 关于原点对称，所以 $-2-n+2n=0$，解得 $n=2$，所以 $m+n=2$.

14. $x=\frac{1}{16}$ 【解析】抛物线 C_1 的标准方程为 $x^2=-\frac{1}{4}y$，其焦点为 $\left(0,-\frac{1}{16}\right)$，准线方程为 $y=\frac{1}{16}$，将抛物线 C_1 绕其顶点顺时针旋转 90° 后得到抛物线 C_2，其焦点为 $\left(-\frac{1}{16},0\right)$，故抛物线 C_2 的准线方程为 $x=\frac{1}{16}$.

15. $1-3\ln 2$ 【解析】函数 $f(x)=|3x-2|-3\ln(2x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，则当 $0<x\leqslant\frac{2}{3}$ 时，$f(x)=2-3x-3\ln(2x)$，此时 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{2}{3}\right]$ 上单调递减；当 $x>\frac{2}{3}$ 时，$f(x)=3x-2-3\ln(2x)$，则 $f'(x)=3-\frac{3}{x}=\frac{3(x-1)}{x}$，当 $x\in\left(\frac{2}{3},1\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，$\therefore f(x)$ 的最小值为 $f(1)=1-3\ln 2$.

16. 682 $\frac{8}{9}-\frac{6n+8}{9\times 4^n}$ 【解析】若正整数 $m\leqslant 4^n$，且与 4^n 不互质，则这个数为偶数，共有 $\frac{1}{2}\times 4^n$ 个，故 $\varphi(4^n)=4^n-\frac{1}{2}\times 4^n=\frac{1}{2}\times 4^n=2\times 4^{n-1}$，所以 $S_5=\frac{2\times(1-4^5)}{1-4}=682$. 因为 $\frac{n}{\varphi(4^n)}=\frac{2n}{4^n}$，所以 $T_n=\frac{2}{4^1}+\frac{4}{4^2}+\frac{6}{4^3}+\cdots+\frac{2n}{4^n}$，所以 $\frac{1}{4}T_n=\frac{2}{4^2}+\frac{4}{4^3}+\frac{6}{4^4}+\cdots+\frac{2n-2}{4^n}+\frac{2n}{4^{n+1}}$，上述两式作差可得 $\frac{3}{4}T_n=2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}\right)-\frac{2n}{4^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}-\frac{2n}{4^{n+1}}=\frac{2}{3}-\frac{6n+8}{3\times 4^{n+1}}$，所以 $T_n=\frac{8}{9}-\frac{6n+8}{9\times 4^n}$.

四、解答题

17. 解：(1)因为 $a_1=20$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-1, n\text{ 为奇数}\\ a_n-2, n\text{ 为偶数}\end{cases}$，

所以 $a_2=a_1-1=19$，$a_3=a_2-2=17$，$a_4=a_3-1=16$.

所以 $b_1=a_2=19$，$b_2=a_4=16$. (2 分)

因为 $b_n-b_{n-1}=a_{2n}-a_{2n-2}=a_{2n-1}-1-a_{2n-2}=a_{2n-2}-2-1-a_{2n-2}=-3$，$(n\geqslant 2)$，

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 19 为首项，-3 为公差的等差数列，

所以 $b_n=19-3(n-1)=22-3n$. (5 分)

(2)由(1)可得 $a_{2n}=22-3n$，

则 $a_{2n-1}=a_{2n-2}-2=22-3(n-1)-2=23-3n$，$n\geqslant 2$， (7 分)

当 $n=1$ 时，$a_1=20$ 符合上式，

所以 $a_{2n-1}=23-3n$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的奇数项和偶数项分别为等差数列， (8 分)

则数列 $\{a_n\}$ 的前 200 项和为

$a_1+a_2+\cdots+a_{200}$

$=(a_1+a_3+\cdots+a_{199})+(a_2+a_4+\cdots+a_{200})$

$=20\times 100+\frac{100\times 99}{2}\times(-3)+19\times 100+\frac{100\times 99}{2}\times(-3)=-25\ 800$. (10 分)

18. 解：(1)因为四边形 $ABCD$ 为矩形，

所以 $PA\perp AD$，$CD\perp AD$，

因为 $PA\perp AB$，$AB\cap AD=A$，

所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp CD$，$PA\perp AC$，

又 $PA\cap AD=A$，PA，$AD\subset$ 平面 PAD，

所以 $CD\perp$ 平面 PAD，

又 $AE\subset$ 平面 PAD，

所以 $CD\perp AE$， (3 分)

因为 $PA=AD$，点 E 是 PD 的中点，

所以 $AE\perp PD$，

又 $PD\cap CD=D$，PD，$CD\subset$ 平面 PCD，

所以 $AE\perp$ 平面 PCD，

所以 $PC\perp AE$，

又 $EF\perp PC$，$AE\cap EF=E$，AE，$EF\subset$ 平面 AEF，

所以 $PC\perp$ 平面 AEF，

所以 $PC\perp AF$. (5 分)

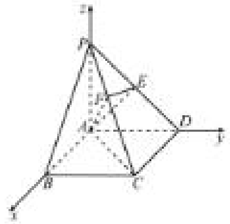
因为 $AB=AD=1$，所以 $AC=\sqrt{2}$，

所以 $AF=\frac{PA\cdot AC}{PC}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

即线段 AF 的长为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. (6 分)

(2)由(1)可知 AB,AD,AP 两两垂直，

所以以 A 为坐标原点，AB,AD,AP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0),P(0,0,1),C(\lambda,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{PC}=(\lambda,1,-1),\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$.　　(8分)

由(1)可知，$\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量，

$\overrightarrow{PC}=(\lambda,1,-1)$ 是平面 AEF 的一个法向量.(9分)

设平面 AEF 与平面 $ABCD$ 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{PC}\rangle|=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2+2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

解得 $\lambda=2$，

所以当平面 AEF 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 时，λ 的值为 2.　　(12分)

19. 解：(1)选择①：由 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos B(1-2\cos C)$ 及余弦定理，

得 $\cos A=\cos B(1-2\cos C)$，

$\because A+B+C=\pi$，

$\therefore \cos A=-\cos(B+C)=-\cos B\cos C+\sin B\sin C=\cos B-2\cos B\cos C$，

$\therefore \cos C\cos B+\sin C\sin B=\cos B$，

$\therefore \cos(C-B)=\cos B$.　　(4分)

$\because B,C\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore C-B\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore C-B=B$ 或 $C-B=-B$，

$\therefore C=2B$ 或 $C=0$(舍)，

$\therefore C=2B$.　　(6分)

选择②：由 $c^2=b^2+ab$ 及 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

得 $a=b(2\cos C+1)$，

则由正弦定理得 $\sin A=\sin B(2\cos C+1)$，

又 $A+B+C=\pi$，

$\therefore \sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\cos C+\sin B$，

$\therefore \sin C\cos B-\cos C\sin B=\sin B$，

$\therefore \sin(C-B)=\sin B$.　　(4分)

$\because B,C\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore C-B\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore C-B=B$，

$\therefore C=2B$.　　(6分)

选择③：$\because \dfrac{\sin C\cos B-\sin B\cos C}{\sin B}=\dfrac{\cos(C-B)}{\cos B}$，

$\therefore \dfrac{\sin(C-B)}{\sin B}=\dfrac{\cos(C-B)}{\cos B}$，

$\therefore \dfrac{\sin(C-B)}{\cos(C-B)}=\dfrac{\sin B}{\cos B}$，

即 $\tan(C-B)=\tan B$.　　(4分)

$\because B,C\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore C-B\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore C-B=B$，

$\therefore C=2B$.　　(6分)

(2)令 $y=\dfrac{2\cos B}{\sin C}+4\sin B$，

由(1)可知 $C=2B$，

$\therefore y=\dfrac{1}{\sin B}+4\sin B$.　　(7分)

$\because \begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2}\\0<B<\dfrac{\pi}{2}\\0<C<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，

即 $\begin{cases}0<\pi-(B+C)<\dfrac{\pi}{2}\\0<B<\dfrac{\pi}{2}\\0<2B<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，

$\therefore \dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{4}$，

$\therefore \sin B\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.　　(9分)

令 $t=\sin B\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

根据对勾函数的性质知 $f(t)=\dfrac{1}{t}+4t$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递增，

$\therefore y\in(4,3\sqrt{2})$，

即 $\dfrac{2\cos B}{\sin C}+4\sin B$ 的取值范围是 $(4,3\sqrt{2})$.(12分)

20. 解：(1)依题意得 X 的可能取值为 0,1,2,3,4，

则 $P(X=0)=(1-0.7)\times(1-0.4)=0.18$，

$P(X=1)=0.7\times(1-0.5)\times(1-0.4)+(1-0.7)\times0.4\times(1-0.8)=0.234$，

$P(X=2)=0.7\times0.5\times(1-0.4)+(1-0.7)\times0.4\times0.8+0.7\times0.4\times(1-0.5)\times(1-0.8)=0.334$，

$P(X=3)=0.7\times0.4\times0.5\times(1-0.8)+0.7\times0.4\times(1-0.5)\times0.8=0.14$，

$P(X=4)=0.7\times0.4\times0.5\times0.8=0.112$.　　(5分)

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	0.18	0.234	0.334	0.14	0.112

则 $E(X)=0\times0.18+1\times0.234+2\times0.334+3\times0.14+4\times0.112=1.77$.　　(7 分)

(2)由(1)可知,若先回答 A 类问题,则"梦幻"队能进入决赛的概率为

$P_1=P(X=3)+P(X=4)=0.14+0.112=0.252$;　　(8 分)

若先回答 B 类问题,记"梦幻"队答对问题的个数为 Y,

则 $P(Y=3)=0.5\times0.8\times0.7\times(1-0.4)+0.5\times0.8\times(1-0.7)\times0.4=0.216$,

$P(Y=4)=0.5\times0.8\times0.7\times0.4=0.112$,

则"梦幻"队能进入决赛的概率为 $P_2=P(Y=3)+P(Y=4)=0.216+0.112=0.328$.　　(11 分)

所以 $P_2>P_1$.

所以为使"梦幻"队进入决赛的概率最大,"梦幻"队应选择先回答 B 类问题.　　(12 分)

21. 解:(1)由题意可知,$|PE|+|PF|=|PA|+|PE|=4>|EF|=2$,

故点 P 的轨迹是以 E,F 为焦点,且长轴长 $2a=4$ 的椭圆,

焦距 $2c=|EF|=2$,

所以 $b^2=a^2-c^2=3$,

所以曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.　　(5 分)

(2)易求得 $B\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$.　　(6 分)

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),x_1\neq x_2\neq1$,

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=\dfrac{1}{2}x+m\end{cases}$,消去 y 得 $x^2+mx+m^2-3=0$,

则 $\Delta=m^2-4(m^2-3)>0$,得 $-2<m<2$,

$x_1+x_2=-m,x_1x_2=m^2-3$.　　(8 分)

则 $k_{BM}+k_{BN}=\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\dfrac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}$

$=\dfrac{\left(y_1-\frac{3}{2}\right)(x_2-1)+\left(y_2-\frac{3}{2}\right)(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$

$=\dfrac{\left(\frac{1}{2}x_1+m-\frac{3}{2}\right)(x_2-1)+\left(\frac{1}{2}x_2+m-\frac{3}{2}\right)(x_1-1)}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}$

$=\dfrac{x_1x_2+(m-2)(x_1+x_2)-2m+3}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}$

$=\dfrac{m^2-3-m(m-2)-2m+3}{m^2-3+m+1}=0$,

所以直线 BM,BN 的斜率之和为定值 0.　　(12 分)

22. 解:(1)$\because f(x)=mx-\dfrac{\ln x}{m},x>0$,

$\therefore f'(x)=m-\dfrac{1}{mx}=\dfrac{m^2x-1}{mx}$.　　(1 分)

①当 $m>0$ 时,令 $f'(x)>0$,得 $x>\dfrac{1}{m^2}$,此时 $f(x)$ 单调递增;

令 $f'(x)<0$,得 $0<x<\dfrac{1}{m^2}$,此时 $f(x)$ 单调递减;　　(3 分)

②当 $m<0$ 时,令 $f'(x)>0$,得 $0<x<\dfrac{1}{m^2}$,此时 $f(x)$ 单调递增;

令 $f'(x)<0$,得 $x>\dfrac{1}{m^2}$,此时 $f(x)$ 单调递减.

综上所述,当 $m<0$ 时,$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{m^2}\right)$ 上单调递增,在 $\left(\dfrac{1}{m^2},+\infty\right)$ 上单调递减;

当 $m>0$ 时,$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{m^2}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\dfrac{1}{m^2},+\infty\right)$ 上单调递增.　　(5 分)

(2)当 $m=1$ 时,$f(x)=x-\ln x,x>0$,

由(1)可知,$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.　　(6 分)

$\because x_1>0,\therefore e^{x_1}>1$,

当 $x_2\geq1$ 时,由 $f(e^{x_1})>f(x_2)$,得 $e^{x_1}>x_2\geq1$,

$\therefore e^{x_1}+x_2>2$;　　(7 分)

当 $0<x_2<1$ 时,要证 $e^{x_1}+x_2>2$,

只需证 $e^{x_1}>2-x_2$,

$\because 0<x_2<1$,

$\therefore 1<2-x_2<2$,

又 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

则只需证 $f(e^{x_1})>f(2-x_2)$.　　(9 分)

下面证 $f(x_2)\geq f(2-x_2)$,

令 $g(x)=f(x)-f(2-x),x\in(0,1)$,

则 $g'(x)=2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{2(x-1)^2}{x(x-2)}<0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,

$\therefore g(x)>g(1)=0$,

$\therefore f(x)>f(2-x)$,

即 $f(x_2)>f(2-x_2)$,

又 $f(e^{x_1})>f(x_2)$,

$\therefore f(e^{x_1})>f(2-x_2)$ 得证,

$\therefore e^{x_1}+x_2>2$.　　(11 分)

综上所述,$e^{x_1}+x_2>2$ 成立.　　(12 分)