2022-2023 下学年高三年级 TOP 二十名校四月冲刺考(一)

高三文科数学试卷

注意事项：

1. 本试卷共4页，考试时间120分钟，卷面总分150分。
2. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡相应的位置上。
3. 全部答案写在答题卡上，答在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\{x|x(x-2)<0\}$，$B=\{-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-1\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{1,2\}$

2. 已知复数 z 满足 $|z+i|=|z-i|$，z 在复平面内对应的点为 (x,y)，则

A. $x+y=0$　　B. $x-y=0$　　C. $x=0$　　D. $y=0$

3. 下列直线中，可以作为曲线 $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$ 的对称轴的是

A. $x=\frac{\pi}{4}$　　B. $x=\frac{\pi}{3}$　　C. $x=\frac{\pi}{2}$　　D. $x=\frac{2\pi}{3}$

4. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 2,\\ x-y\leqslant 2,\\ x-2y+4\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值为

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

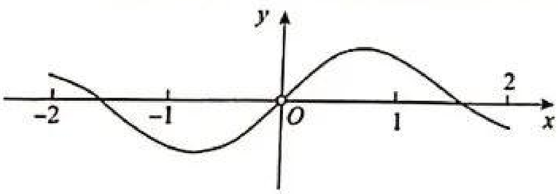
5. 已知曲线 $f(x)=\begin{cases}\ln x,\ x>1,\\ -\ln x,\ 0<x<1,\end{cases}$ 过曲线上 A,B 两点分别作曲线的切线交于点 P，$AP\perp BP$. 记 A,B 两点的横坐标分别为 x_1,x_2，则 $x_1x_2=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

6. 尿酸是鸟类和爬行类的主要代谢产物，正常情况下人体内的尿酸处于平衡的状态，但如果体内产生过多来不及排泄或者尿酸排泄机制退化，则体内尿酸滞留过多，当血液尿酸浓度大于7 mg/dL时，人体体液变酸，时间长会引发痛风，而随低食物(低嘌呤食物)对提高痛风病人缓解率、降低血液尿酸浓度具有较好的疗效. 科研人员在对某类随低食物的研究过程中发现，在每天定时\定量等特定条件下，可以用对数模型 $U(t)=-U_0\ln Kt$ 描述血液尿酸浓度 $U(t)$(单位：mg/dL)随摄入随低食物天数 t 的变化规律，其中 U_0 为初始血液尿酸浓度，K 为参数. 已知 $U_0=20$，在按要求摄入随低食物50天后，测得血液尿酸浓度为15，若使血液尿酸浓度达到正常值，则需将摄入随低食物的天数至少提高到($e^{\frac{2}{5}}\approx 1.49$)

A. 69　　B. 71　　C. 73　　D. 75

7. 如图是下列四个函数中的某个函数在区间 $[-2,2]$ 上的大致图象，则该函数是



A. $f(x)=\frac{x\sin 2x}{e^x-e^{-x}}$

B. $f(x)=\frac{x^2\sin 2x}{e^x-e^{-x}}$

C. $f(x)=\frac{x\cos 2x}{e^x-e^{-x}}$

D. $f(x)=\frac{x^2\cos 2x}{e^x-e^{-x}}$

8. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，点 $A(3,2\sqrt{3})$ 在 C 上，直线 AF 与 l 交于点 B，则 $\frac{|AF|}{|BF|}=$

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. 2

9. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N,P 分别为 A_1B,A_1C_1,A_1D 的中点，则下列结论中错误的是

A. $MN\parallel AD_1$

B. 平面 $MNP\parallel$ 平面 BC_1D

C. $MN\perp CD$

D. 平面 $MNP\perp$ 平面 A_1BD

10. 已知圆 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=5$，圆 C' 是以圆 $x^2+y^2=1$ 上任意一点为圆心，半径为 1 的圆. 圆 C 与圆 C' 交于 A,B 两点，则当 $\angle ACB$ 最大时，$|CC'|=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

11. 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：如果 $a_m=a_k$，那么 $a_{m+1}=a_{k+1}$，且 $a_1=a_5=1$，$a_3=-3$，$a_4=4$，a_2 是 a_1 与 a_4 的等比中项. 若 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 存在最大值 S，则 $S=$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

12. 已知圆台 O_1O 的上、下底面半径分别为 r,R，高为 h，平面 α 经过圆台 O_1O 的两条母线，设 α 截此圆台所得的截面面积为 S，则

A. 当 $h\geq R-r$ 时，S 的最大值为 $(R+2r)h$

B. 当 $h\geq R-r$ 时，S 的最大值为 $\frac{(R+r)[h^2+(R-r)^2]}{2(R-r)}$

C. 当 $h<R-r$ 时，S 的最大值为 $(R+2r)h$

D. 当 $h<R-r$ 时，S 的最大值为 $\frac{(R+r)[h^2+(R-r)^2]}{2(R-r)}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,-1)$，写出一个与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直的非零向量 $\boldsymbol{c}=$________.

14. 从 A，B 等 5 处水样监测点中随机选 3 处进行水样检测，则 A，B 不同时入选的概率为________.

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$(\sqrt{2}a-b)\tan B=b\tan C$，$a=\sqrt{2}c$，则 $\frac{b}{c}=$________.

16. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左顶点为 A，P 为 C 的一条渐近线上一点，AP 与 C 的另一条渐近线交于点 Q，若直线 AP 的斜率为 1，且 A 为 PQ 的三等分点，则 C 的离心率为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$，等差数列$\{b_n\}$满足 $b_n=a_n+a_{n+1}$，$b_1=-3$，$b_2+b_3=-12$.

（1）证明：$a_n-a_{n+2}=2$；

（2）若$\{a_n\}$为等差数列，求$\{a_n\}$的前 n 项和.

18.（本小题满分 12 分）

太平洋是地球上岛屿最多的大洋，有大小岛屿 2 万多个，岛屿面积约占世界岛屿总面积的 45%，蕴藏着丰富的动植物资源. 为了解太平洋某海域的岛屿上植物种数的生态学规律，随机选择了 6 个岛屿，搜集并记录了每个岛屿的植物种数（单位：个）和岛屿面积（单位：平方千米），整理得到如下数据：

样本号 i	1	2	3	4	5	6
岛屿面积 x	6	15	25	34	44	54
植物种数 y	5	10	15	19	24	31

并计算得 $\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2=2\,042$，$\sum\limits_{i=1}^{4}x_iy_i=1\,201$.

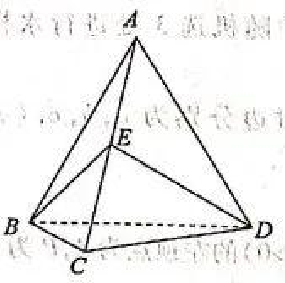
（1）由数据看出，可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系. 根据表中前 4 号样本数据，求 y 关于 x 的线性回归方程；

（2）根据所求的线性回归方程计算第 5，6 号样本植物种数的预报值 $\hat{y}$，并与相应植物种数的真实值 y 进行比较. 若满足 $|\hat{y}-y|\leqslant 1$，则可用此回归方程估计该海域其他岛屿的植物种数，并估计面积为 100 平方千米的岛屿上的植物种数；若不满足，请说明理由.

参考公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，$\angle BCD=90°$，$AB=AC=AD$.



（1）证明：平面 $ABD\perp$平面 BCD；

（2）设 $BC=CD=2$，E 为 AC 的中点，$\angle BED=90°$，求点 B 到平面 ACD 的距离.

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 A，P 为 C 上一点，O 为原点，$|PA|=|PO|$，$\angle APO=90°$，$\triangle APO$ 的面积为 1.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设 B 为 C 的右顶点，过点 $(1,0)$ 且斜率不为 0 的直线 l 与 C 交于 M,N 两点，证明：$3\tan\angle MAB=\tan\angle NBA$.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x\ln x-ax^2$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

（1）讨论 $f'(x)$ 的单调性；

（2）若直线 $y=\frac{e^2}{2}$ 与曲线 $y=f(x)$ 有两个交点，求 a 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分。请考生从 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22.【选修 4-4：坐标系与参数方程】（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=t\cos\theta,\\ y=-1+t\sin\theta\end{cases}$（$t$ 为参数），曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases}x=t',\\ y=t'^2-2\end{cases}$（$t'$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=1$.

（1）求 C_1,C_2 的直角坐标方程；

（2）若直线 l 与 C_1 交于 A,B 两点，与 C_2 交于 C,D 两点，$|OA|=|OB|$，且 $|OC|=|OD|$，求 $|CD|$.

23.【选修 4-5：不等式选讲】（10 分）

已知 a,b 均不为零，且满足 $a^2+b^2=1$. 证明：

（1）$|a|+|b|\leqslant\sqrt{2}$；

（2）$\left|\frac{a^3}{b}\right|+\left|\frac{b^3}{a}\right|\geqslant 1$.

2022-2023 下学年高三年级 TOP 二十名校四月冲刺考(一)
高三文科数学参考答案

1.【答案】 B

【解析】 $A=\{x|x(x-2)<0\}=\{x|0<x<2\}$，则 $A\cap B=\{1\}$. 故选 B.

2.【答案】 D

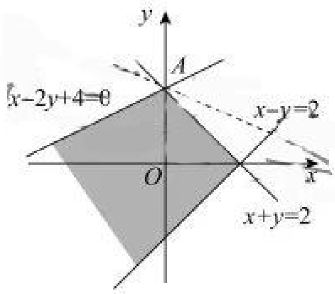
【解析】 设复数 $z,-i,i$ 在复平面内对应的点分别为 $Z(x,y),A(0,-1),B(0,1)$，则 $|z+i|=|z-i|$ 的几何意义是 Z 到 A 的距离和 Z 到 B 的距离相等，则 z 在复平面内对应的点(x,y)满足 $y=0$. 故选 D.

3.【答案】 A

【解析】 $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2x$. 令 $\sin 2x=\pm1$，则 $2x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，故对称轴可以是直线 $x=\frac{\pi}{4}$. 故选 A.

4.【答案】 C

【解析】 作出可行域如图中阴影部分所示，当直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$经过点 $A(0,2)$时，纵截距$\frac{z}{2}$最大，此时 $z_{max}=0+2\times2=4$. 故选 C.



5.【答案】 B

【解析】 当 $x>1$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x}$；当 $0<x<1$ 时，$f'(x)=-\frac{1}{x}$. 设 $x_1<1,x_2>1$，因为曲线 $f(x)$在点 A,B 处的两条切线互相垂直，所以$-\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=-1$，则$x_1x_2=1$. 故选 B.

6.【答案】 D

【解析】 由函数模型 $U(t)=-U_0\ln Kt$，当 $t=50$ 时，$U(t)=15$，可得 $15=-20\ln(50K)$，即 $15=-20\ln 50-20\ln K$①. 设血液尿酸浓度达到正常值 7 时，摄入天数为 t'，则 $7=-20\ln(t'K)$，即 $7=-20\ln t'-20\ln K$②，②−①，得$-8=-20\ln\frac{t'}{50}$，即 $\ln\frac{t'}{50}=\frac{2}{5}$，则$\frac{t'}{50}=e^{\frac{2}{5}}$，$t'=50e^{\frac{2}{5}}\approx74.5$. 故选 D.

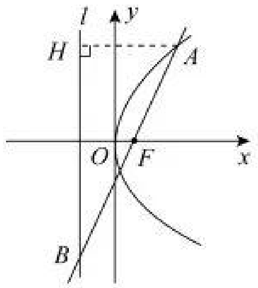
7.【答案】 A

【解析】 对于选项 B，$f(-x)=\frac{(-x)^2\sin(-2x)}{e^{-x}-e^{x}}=\frac{x^2\sin 2x}{e^{x}-e^{-x}}=f(x)$，为偶函数，排除 B；对于选项 C，$f(-x)=\frac{-x\cos(-2x)}{e^{-x}-e^{x}}=\frac{x\cos 2x}{e^{x}-e^{-x}}=f(x)$，为偶函数，排除 C；对于选项 D，当 $x=1$ 时，$f(1)=\frac{\cos 2}{e-\frac{1}{e}}<$

0，排除 D. 故选 A.

8.【答案】 A

【解析】 由 $A(3,2\sqrt{3})$ 在 $y^2=2px$ 上，得 $12=2p\times3$，解得 $p=2$，则 $F(1,0)$，直线 AF 的斜率 $k=\dfrac{2\sqrt{3}}{3-1}=\sqrt{3}$，倾斜角为 $60°$. 如图，过点 A 作 l 的垂线，垂足为 H. 由抛物线的定义可知 $|AF|=|AH|$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AHB$ 中，$\angle BAH=60°$，$\therefore |AB|=2|AH|$，$\therefore |BF|=|AB|-|AF|=|AH|$，$\therefore |AF|=|BF|$. 故选 A.

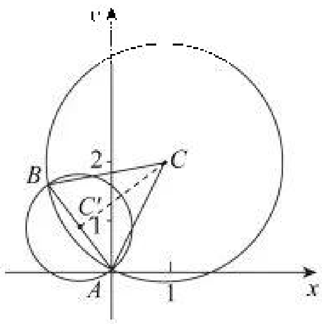


9.【答案】 D

【解析】 在 $\triangle A_1BC_1$ 中，因为 M,N 分别为 A_1B,A_1C_1 的中点，所以 $MN/\!/BC_1$，又 $BC_1/\!/AD_1$，所以 $MN/\!/AD_1$，A 选项正确；同理，$MP/\!/BD$，$MN/\!/BC_1$，则 $MP/\!/$平面 BC_1D，$MN/\!/$平面 BC_1D，所以平面 $MNP/\!/$平面 BC_1D，B 选项正确；因为 $MN/\!/AD_1$，$AD_1\perp CD$，所以 $MN\perp CD$，C 选项正确；取 BD 的中点 E，则 $\angle A_1EC_1$ 即为二面角 A_1-BD-C_1 的平面角，易知 $\angle A_1EC_1\neq90°$，则平面 A_1BD 与平面 BC_1D 不垂直，又平面 $MNP/\!/$平面 BC_1D，故平面 MNP 与平面 A_1BD 不垂直，D 选项错误. 故选 D.

10.【答案】 D

【解析】 在 $\triangle ABC$ 中，$|AC|=|BC|=\sqrt{5}$，如图，当公共弦 AB 最大，即 AB 为圆 C' 的直径时，$\angle ACB$ 最大，此时在 $\mathrm{Rt}\triangle CC'A$ 中，$|AC|=\sqrt{5}$，$|AC'|=1$，$|CC'|=\sqrt{|AC|^2-|AC'|^2}=2$. 故选 D.



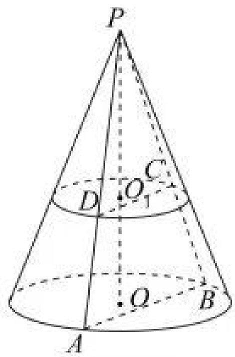
11.【答案】 B

【解析】 由 $a_1=1$，$a_4=4$，a_2 是 a_1 与 a_4 的等比中项，可知 $a_2=\pm2$. 若 $a_2=2$，由 $a_1=a_5=1$，可知 $a_6=2$，由 $a_3=-3$，可知 $a_7=-3$，则 $a_8=a_4=4$，则数列$\{a_n\}$：$1,2,-3,4,1,2,-3,4,\cdots$，是以 4 为周期的数列，易知前 n 项和无最大值. 若 $a_2=-2$，同理可得数列$\{a_n\}$：$1,-2,-3,4,1,-2,-3,4,\cdots$，则数列$\{S_n\}$是以 4 为周期的数列，且 $S_1=1$，$S_2=-1$，$S_3=-4$，$S_4=0$，所以 S_n 的最大值 $S=1$. 故选 B.

12.【答案】 D

【解析】 如图，将圆台 O_1O 补成圆锥 PO. 设圆台 O_1O 的母线长为 l，则 $l^2=h^2+(R-r)^2$，等腰梯形 $ABCD$ 为过两母线的截面. 设 $PC=x$，$\angle APB=\theta$，由 $\dfrac{r}{R}=\dfrac{x}{x+l}$，得 $x=\dfrac{rl}{R-r}$，则 $S=S_{\triangle PAB}-S_{\triangle PCD}$

$=\frac{1}{2}[(x+l)^2-x^2]\sin\theta=\frac{R+r}{2(R-r)}l^2\sin\theta$. 当 $h\geqslant R-r$ 时,$\theta\leqslant 90°$,当 $\sin\theta$ 最大,即截面为轴截面时面积最大,则 S 的最大值为 $(R+r)h$. 当 $h<R-r$ 时,$\theta>90°$,当 $\sin\theta=1$ 时,截面面积最大,则 S 的最大值为 $\frac{R+r}{2(R-r)}l^2=\frac{(R+r)[h^2+(R-r)^2]}{2(R-r)}$. 故选 D.



13.【答案】 $(1,-1)$(答案不唯一,横、纵坐标互为相反数即可)

【解析】 由题意可知 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,3)$,设 $\boldsymbol{c}=(x,y)$,则 $3x+3y=0$,取 $x=1$,则 $y=-1$,则与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直的非零向量可以为 $\boldsymbol{c}=(1,-1)$.

14.【答案】 $\frac{7}{10}$

【解析】 设 5 处水样监测点分别为 A、B、C、D、E,从中随机选择 3 处有 ABC、ABD、ABE、ACD、ACE、ADE、BCD、BCE、BDE、CDE,共 10 种情况,其中 A、B 同时入选的有 ABC、ABD、ABE,共 3 种情况,故 A、B 不同时入选的概率 $P=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$.

15.【答案】 1

【解析】 由 $(\sqrt{2}a-b)\tan B=b\tan C$ 和正弦定理,得 $(\sqrt{2}\sin A-\sin B)\tan B=\sin B\tan C$,则有 $(\sqrt{2}\sin A-\sin B)\frac{\sin B}{\cos B}=\sin B\frac{\sin C}{\cos C}$,整理,得 $\sqrt{2}\sin A\cos C=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin(B+C)=\sin A$,则 $\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\therefore C=\frac{\pi}{4}$. 又$\because a=\sqrt{2}c$,$\therefore \sin A=\sqrt{2}\sin C=1$,$\therefore A=\frac{\pi}{2}$,$\therefore B=\frac{\pi}{4}$,$\therefore b=c$,$\therefore \frac{b}{c}=1$.

16.【答案】 $\frac{\sqrt{10}}{3}$

【解析】 不妨设点 P 在第二象限,直线 AP 的方程为 $y=x+a$,联立 $\begin{cases}y=x+a,\\ y=-\frac{b}{a}x,\end{cases}$ 得点 P 的纵坐标 $y_P=\frac{ab}{a+b}$;联立 $\begin{cases}y=x+a,\\ y=\frac{b}{a}x,\end{cases}$ 得点 Q 的纵坐标 $y_Q=\frac{ab}{b-a}$. 由 A 为 PQ 的三等分点,可知 $y_Q=-2y_P$,则有 $\frac{ab}{b-a}=-\frac{2ab}{a+b}$,整理,得 $a=3b$,则 $a^2=9(c^2-a^2)$,故 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{3}$.

17.【答案】 见解析

【解析】 (1)设数列$\{b_n\}$的公差为d,由$b_2+b_3=-12$,得$2b_1+3d=-12$,

由$b_1=-3$,得$d=-2$,故$b_n=-2n-1$,

即$a_n+a_{n+1}=-2n-1$. ① ……(3分)

递推,得$a_{n+1}+a_{n+2}=-2n-3$,②

①-②,得$a_n-a_{n+2}=2$,

故$a_n-a_{n+2}=2$得证. ……(6分)

(2)法一:若$\{a_n\}$为等差数列,设公差为d',

由$a_{n+2}-a_n=-2$,可得$2d'=-2$,则$d'=-1$.

又$\because a_n+a_{n+1}=-2n-1$,$\therefore 2a_n+d'=-2n-1$,$\therefore a_n=-n$,

$\therefore a_1=-1$,$\therefore \{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{(-1-n)n}{2}=-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}$.

法二:由$a_n+a_{n+1}=-2n-1$,可知$a_2=-a_1-3$.

由$a_{n+2}-a_n=-2$,可知$a_3=a_1-2$.

又$\because \{a_n\}$为等差数列,$\therefore a_1+a_3=2a_2$,

即$a_1+(a_1-2)=2(-a_1-3)$,解得$a_1=-1$, ……(9分)

则有$d'=-1$,$\{a_n\}$的前n项和$S_n=-n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot(-1)=-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}$. ……(12分)

18.【答案】 见解析

【解析】 (1)$\bar{x}=\frac{6+15+25+34}{4}=20$,$\bar{y}=\frac{5+10+15+19}{4}=12.25$, ……(2分)

$\therefore \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_iy_i-4\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{4}x_i^2-4\bar{x}^2}=\frac{1\ 201-4\times20\times12.25}{2\ 042-4\times400}=0.5$, ……(4分)

$\therefore \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=12.25-0.5\times20=2.25$,

$\therefore$ 所求线性回归方程为$\hat{y}=0.5x+2.25$. ……(6分)

(2)当$x=44$时,$\hat{y}=0.5\times44+2.25=24.25$,

$|\hat{y}-y|=|24.25-24|=0.25\leqslant1$. ……(8分)

当$x=54$时,$\hat{y}=0.5\times54+2.25=29.25$,

$|\hat{y}-y|=|29.25-31|=1.75>1$. ……(10分)

故不能用此回归方程估计该海域其他岛屿的植物种数. ……(12分)

19.【答案】 见解析

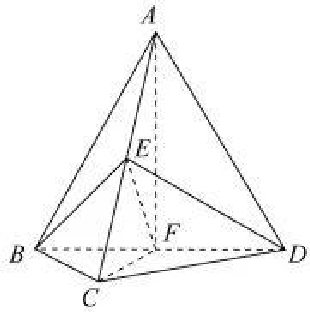
【解析】 (1)如图,取BD的中点F,连接AF,CF,EF.

$\because \angle BCD=90°$,$BF=DF$,$\therefore BF=CF$.

又$\because AB=AC$,AF为公共边,

$\therefore \triangle ABF\cong\triangle ACF$,

$\therefore \angle AFB=\angle AFC$. ……(2分)



同理,可得$\angle AFC=\angle AFD$,

$\therefore \angle AFB=\angle AFD$.

$\because \angle AFB+\angle AFD=180°$,

$\therefore \angle AFB=\angle AFC=\angle AFD=90°$, ………………………………………………………… (4分)

$\therefore AF\perp BD, AF\perp CF$.

又$\because BD\cap CF=F$, $\therefore AF\perp$平面BCD,

$\because AF\subset$平面ABD, $\therefore$平面$ABD\perp$平面BCD. ………………………………………… (5分)

(2)在$\triangle BDE$中,$\because \angle BED=90°$,F为BD的中点,

$\therefore EF=\frac{1}{2}BD$.

$\because BC=CD=2$, $\angle BCD=90°$, $\therefore BD=2\sqrt{2}$, $\therefore EF=\sqrt{2}$.

在$\triangle ACF$中,$\because \angle AFC=90°$,E为AC的中点.

$\therefore AC=2EF=2\sqrt{2}$.

在$Rt\triangle ACF$中,$AC=2\sqrt{2}$, $CF=\sqrt{2}$,则$AF=\sqrt{6}$,

$\therefore$三棱锥$A-BCD$的体积$V_{A-BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot AF=\frac{1}{3}\times2\times\sqrt{6}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. ……………………… (8分)

由$AC=AD=2\sqrt{2}$, $CD=2$,

可得$\triangle ACD$的面积$S_{\triangle ACD}=\sqrt{7}$.

设点B到平面ACD的距离为d,

由$V_{B-ACD}=V_{A-BCD}$,

得$\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot d=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,解得$d=\frac{2\sqrt{42}}{7}$,

故点B到平面ACD的距离为$\frac{2\sqrt{42}}{7}$. …………………………………………………… (12分)

20.【答案】 见解析

【解析】 (1)不妨设点P在x轴的上方,

由椭圆的性质可知$|OA|=a$.

$\because \triangle APO$是以P为直角顶点的等腰直角三角形,$\therefore P\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$,

代入$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,得$\frac{\frac{a^2}{4}}{a^2}+\frac{\frac{a^2}{4}}{b^2}=1$,整理,得$a^2=3b^2$. ………………………………………… (2分)

$\because$ $\triangle APO$ 的面积为 1，$\therefore \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a}{2}=1$，$\therefore a^2=4$，$\therefore b^2=\frac{4}{3}$.

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1$. ……………………………………………………………… (4 分)

(2) 设直线 AM 的斜率为 k_1，直线 BN 的斜率为 k_2，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，直线 MN 的方程为 $x=my+1$.

不妨设 $y_2<0<y_1$，则 $k_1=\tan\angle MAB$，$k_2=\tan\angle NBA$.

联立 $\begin{cases}x=my+1,\\x^2+3y^2=4。\end{cases}$ 可得 $(m^2+3)y^2+2my-3=0$，

$\Delta=16m^2+36>0$，则 $y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+3}$，$y_1y_2=-\frac{3}{m^2+3}$， ……………………………………… (6 分)

$\therefore \frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=\frac{2m}{3}$，即 $2my_1y_2=3(y_1+y_2)$，

$$\therefore \frac{k_1}{k_2}=\frac{\frac{y_1}{x_1+2}}{\frac{y_2}{x_2-2}}=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{x_2-2}{y_2}=\frac{y_1(my_2-1)}{(my_1+3)y_2}=\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-y_1}{\frac{3}{2}(y_1+y_2)+3y_2}=\frac{\frac{1}{2}y_1+\frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1+\frac{9}{2}y_2}=\frac{1}{3},$$ ……………………………………………………… (10 分)

$\therefore 3k_1=k_2$，

故 $3\tan\angle MAB=\tan\angle NBA$ 得证. ……………………………………………………………… (12 分)

21.【答案】 见解析

【解析】 (1) 设 $g(x)=f'(x)=\ln x-2ax+1$，$g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$g'(x)=\frac{1}{x}-2a$. ……………………………………………………………………………… (1 分)

当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增； …………… (2 分)

当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2a}$.

若 $x\in\left(0,\frac{1}{2a}\right)$，则 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

若 $x\in\left(\frac{1}{2a},+\infty\right)$，则 $g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a>0$ 时，$f'(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2a}\right)$ 上单调递增，在区间 $\left(\frac{1}{2a},+\infty\right)$ 上单调递减. ……………………………………………………… (4 分)

(2) 直线 $y=\frac{e^2}{2}$ 与曲线 $y=f(x)$ 有两个交点，即关于 x 的方程 $x\ln x-ax^2=\frac{e^2}{2}$ 有两个解，

整理方程，得 $a=\frac{\ln x}{x}-\frac{e^2}{2x^2}$. ······························ (6 分)

令 $\varphi(x)=\frac{\ln x}{x}-\frac{e^2}{2x^2}$，其中 $x>0$，

则 $\varphi'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{e^2}{x^3}=\frac{x-x\ln x+e^2}{x^3}$.

令 $s(x)=x-x\ln x+e^2$，

则 $s'(x)=-\ln x$.

当 $0<x<1$ 时，$s'(x)>0$，此时函数 $s(x)$ 单调递增，

当 $x>1$ 时，$s'(x)<0$，此时函数 $s(x)$ 单调递减. ······························ (8 分)

由 $s(1)=1+e^2$，$s(e^2)=0$，

得 $0<x<1$ 时，$x-x\ln x+e^2=x(1-\ln x)+e^2>0$，则 $\varphi'(x)>0$，

当 $1<x<e^2$ 时，$s(x)>s(e^2)=0$，则 $\varphi'(x)>0$，

当 $x>e^2$ 时，$s(x)<s(e^2)=0$，则 $\varphi'(x)<0$，

则函数 $\varphi(x)$ 在区间 $(0,e^2)$ 上单调递增，在区间 $(e^2,+\infty)$ 上单调递减，

则 $\varphi(x)_{max}=\varphi(e^2)=\frac{3}{2e^2}$. ······························ (10 分)

当 x 趋近于 $+\infty$ 时，$\varphi(x)$ 趋近于 0，即当 $x>e^2$ 时，$\varphi(x)>0$；

当 x 趋近于 0 时，$\varphi(x)$ 趋近于 $-\infty$.

故要使直线 $y=\frac{e^2}{2}$ 与曲线 $y=f(x)$ 有两个交点，则需 $0<a<\frac{3}{2e^2}$.

即 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{3}{2e^2}\right)$. ······························ (12 分)

22.【答案】 见解析

【解析】 (1) 由曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases}x=t',\\ y=t'^2-2,\end{cases}$

得 C_1 的直角坐标方程为 $y=x^2-2$. ······························ (2 分)

由 $\rho=1$ 得 $\rho^2=1$，又 $x^2+y^2=\rho^2$，则有 $x^2+y^2=1$，

故 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=1$. ······························ (4 分)

(2) 把 $\begin{cases}x=t\cos\theta,\\ y=-1+t\sin\theta\end{cases}$ 代入 $y=x^2-2$，得 $t\sin\theta-1=t^2\cos^2\theta-2$，

整理，得 $t^2\cos^2\theta-t\sin\theta-1=0$，

设 t_1,t_2 所对应的点分别为 A,B，

则 $t_1+t_2=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$. ······························ (6 分)

把 $\begin{cases}x=t\cos\theta,\\ y=-1+t\sin\theta\end{cases}$ 代入 $x^2+y^2=1$ 可得 $t^2\cos^2\theta+(t\sin\theta-1)^2=1$，

整理，得 $t^2-2t\sin\theta=0$. 设 t_3,t_4 所对应的点分别为 C,D，

则 $t_3+t_4=2\sin\theta$. ………………………………………………………………… (8 分)

$\because |OA|=|OB|$,且 $|OC|=|OD|$,即 AB 与 CD 的中点重合,

$\therefore t_1+t_2=t_3+t_4$,

$\therefore \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=2\sin\theta$,且 $\sin\theta\neq 0$,

$\therefore \cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

故 $|CD|=\sqrt{2}$. ………………………………………………………………… (10 分)

23.【答案】 见解析

【解析】 (1) $\because a^2+b^2=1$, $\therefore |a|^2+|b|^2=1$,

$\therefore |a|^2+|b|^2=(|a|+|b|)^2-2|a|\cdot|b|=1$. ……………………………………… (2 分)

根据基本不等式,得 $(|a|+|b|)^2-1=2|a|\cdot|b|\leqslant\dfrac{(|a|+|b|)^2}{2}$,

当且仅当 $|a|=|b|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时,等号成立.

整理,得 $(|a|+|b|)^2\leqslant 2$,

$\therefore |a|+|b|\leqslant\sqrt{2}$. ………………………………………………………… (4 分)

(2) $\left|\dfrac{a^3}{b}\right|+\left|\dfrac{b^3}{a}\right|=\left|\dfrac{a}{b}\right|\cdot a^2+\left|\dfrac{b}{a}\right|\cdot b^2$

$=\left|\dfrac{a}{b}\right|\cdot(1-b^2)+\left|\dfrac{b}{a}\right|\cdot(1-a^2)$

$=\left|\dfrac{a}{b}\right|-|ab|+\left|\dfrac{b}{a}\right|-|ab|$

$=\left|\dfrac{a}{b}\right|+\left|\dfrac{b}{a}\right|-2|ab|$. ……………………………………………… (8 分)

由基本不等式和不等式的性质,得 $\left|\dfrac{a}{b}\right|+\left|\dfrac{b}{a}\right|\geqslant 2\sqrt{\left|\dfrac{a}{b}\right|\cdot\left|\dfrac{b}{a}\right|}=2$, $2|ab|\leqslant a^2+b^2=1$,

故 $\left|\dfrac{a}{b}\right|+\left|\dfrac{b}{a}\right|-2|ab|\geqslant 2-1=1$,

当且仅当 $|a|=|b|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时,等号成立,

$\therefore \left|\dfrac{a^3}{b}\right|+\left|\dfrac{b^3}{a}\right|\geqslant 1$. ……………………………………………… (10 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。