高二数学试卷参考答案

1. C　由题意可得 $A=\{x|x<2\}$，则 $A\cap B=\{0\}$.

2. D　当 $a=1,b=-2$ 时，$a^2<b^2$，则 A 错误. 当 $a=-1,b=2$ 时，$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，则 B 错误. 当 $a=1,b=-2$ 时，$a^2<b^2$，则 C 错误. 由 $\lg a>\lg b$，得 $a>b>0$，则 D 正确.

3. A　由题意可得 $f'(x)=\ln x+2f'(1)x+1$，所以 $f'(1)=2f'(1)+1$，则 $f'(1)=-1$.

4. B　由题意可得 $a_n=\frac{n}{n^2+14}=\frac{1}{n+\frac{14}{n}}$. 当 $n=3$ 时，$n+\frac{14}{n}=\frac{23}{3}$，当 $n=4$ 时，$n+\frac{14}{n}=\frac{15}{2}$. 因为 $\frac{23}{3}>\frac{15}{2}$，所以 $n+\frac{14}{n}\geqslant\frac{15}{2}$，则 $a_n\leqslant\frac{2}{15}$.

5. D　由题意可得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(2)=0$. 因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，且 $f(-2)=0$. 由 $xf(x)>0$，得 $\begin{cases}x>0,\\ f(x)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\ f(x)<0,\end{cases}$ 解得 $x<-2$ 或 $x>2$.

6. C　由 $a_1>a_2$，得 $a_1>a_1q$，则 $q<1$. 由 $a_2a_5>a_3a_6$，得 $a_1^2q^5>a_1^2q^7$，即 $q^5(1-q^2)>0$，则 $q<-1$ 或 $0<q<1$. 故"$a_1>a_2$"是"$a_2a_5>a_3a_6$"的必要不充分条件.

7. A　由题意可得 $f'(x)=e^x-2$. 令 $f'(x)=e^x-2=-1$，解得 $x=0$. 因为 $f(0)=1$，所以点 $(0,1)$ 到直线 $x+y+3=0$ 的距离 $d=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，则 A,B 两点之间的最短距离是 $2\sqrt{2}$.

8. A　设该公司第 n 年用于该新项目的投入为 a_n 万元，则 $\{a_n\}$ 是首项为 10，公比为 $\frac{6}{5}$ 的等比数列，从而 $\frac{10\times[1-(\frac{6}{5})^n]}{1-\frac{6}{5}}\leqslant 250$，即 $(\frac{6}{5})^n\leqslant 6$，即 $n\lg\frac{6}{5}\leqslant\lg 6$，即 $n\leqslant\frac{\lg 2+\lg 3}{2\lg 2+\lg 3-1}=\frac{0.778}{0.079}=\frac{778}{79}$. 因为 $n\in\mathbf{N}_+$，所以 n 的最大值是 9.

9. AC　设 $f(x)=kx+b$，则 $f(2x)=2kx+b$，故 $f(f(2x))=f(2kx+b)=2k^2x+kb+b$. 因为 $f(f(2x))=8x+3$，所以 $\begin{cases}2k^2=8,\\ kb+b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\ b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=-2,\\ b=-3,\end{cases}$ 则 $f(x)=2x+1$ 或 $f(x)=-2x-3$.

10. ABD　记每层塔的数目为 $\{b_n\}$，则当 $n\geqslant 6$ 时，$b_n-b_{n-1}=2$，设共有 n 层，则有 $1+3+3+5+n(n-4)=108$，解得 $n=12$，则 A 正确. 前 10 层的塔数为 $1+3+3+5+10\times(10-4)=72<88$，而前 11 层的塔数为 $1+3+3+5+11\times(11-4)=89$，故 B 正确. 每一层比上一层多 2 座塔，则宽度比上一层多 $2\times(2+1.2)=6.4$ 米，C 错误. 由题意可得 $a_5=12.8+2\times 1=14.8$，则 $a_{11}-a_5=6\times 6.4=38.4$，即 $a_{11}=53.2$，故 D 正确.

11. BC　因为 $a>0,b>0$，且 $2a+b=2$，所以 $2\sqrt{2ab}\leqslant 2$，所以 $ab\leqslant\frac{1}{2}$，当且仅当 $2a=b=1$ 时，等号成立，则 A 错误. 由题意可得 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{1}{2}(2a+b)(\frac{1}{a}+\frac{2}{b})=\frac{1}{2}(\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+4)\geqslant\frac{1}{2}\times(4+4)=4$，当且仅当 $2a=b=1$ 时，等号成立，则 B 正确. 因为 $ab\leqslant\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}\geqslant\frac{4}{ab}\geqslant 8$，当且仅当 $2a=b=1$ 时，等号成立，则 C 正确. 由题意可得 $\frac{(2a+1)(b+1)}{\sqrt{ab}}=\frac{2ab+3}{\sqrt{ab}}=2\sqrt{ab}+\frac{3}{\sqrt{ab}}\geqslant 2\sqrt{6}$，此时，$2ab=3$. 因为 $2a+b=2$，所以不存在 a,b，使得 $\begin{cases}2ab=3,\\ 2a+b=2,\end{cases}$ 则 D 错误.

12. BC　令 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}>0$，所以函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

因为 $\ln 2<1$，所以 $g(\ln 2)<g(1)$，即 $\frac{f(\ln 2)}{e^{\ln 2}}<\frac{f(1)}{e}$，所以 $\frac{f(\ln 2)}{2}<\frac{f(1)}{e}$，$ef(\ln 2)<2f(1)$，故 A 错误.

因为 $e^x\geqslant x+1$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，所以 $e^{0.1}>1.1=\sqrt{1.21}>\sqrt{1.2}$，

所以 $g(e^{0.1})>g(\sqrt{1.2})$，即 $\frac{f(e^{0.1})}{e^{e^{0.1}}}>\frac{f(\sqrt{1.2})}{e^{\sqrt{1.2}}}$，所以 $e^{\sqrt{1.2}}f(e^{0.1})>e^{e^{0.1}}f(\sqrt{1.2})$，故 B 正确.

令 $h(x)=x\ln x$，则 $h'(x)=\ln x+1$.

当 $0<x<\frac{1}{e}$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>\frac{1}{e}$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{e},+\infty)$ 上单调递增.

因为 $\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$，所以 $h(\frac{1}{e})<h(\frac{1}{2})$，所以 $\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}<\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$，$\frac{1}{e}>\ln\sqrt{2}$，所以 $g(\frac{1}{e})>g(\ln\sqrt{2})$，

即 $\frac{f(\frac{1}{e})}{e^{\frac{1}{e}}}>\frac{f(\ln\sqrt{2})}{e^{\ln\sqrt{2}}}$，$\sqrt{2}f(\frac{1}{e})>e^{\frac{1}{e}}f(\ln\sqrt{2})$，故 C 正确.

因为 $2>\sqrt{e}>\frac{1}{e}$，所以 $h(2)>h(\sqrt{e})$，所以 $2\ln 2>\sqrt{e}\ln\sqrt{e}$，所以 $2\ln 2>\frac{\sqrt{e}}{2}$，

所以 $g(2\ln 2)>g(\frac{\sqrt{e}}{2})$，即 $\frac{f(2\ln 2)}{e^{2\ln 2}}>\frac{f(\frac{\sqrt{e}}{2})}{e^{\frac{\sqrt{e}}{2}}}$，$e^{\frac{\sqrt{e}}{2}}f(2\ln 2)>4f(\frac{\sqrt{e}}{2})$，故 D 错误.

13. $(1,2)$　由题意可得 $\begin{cases}-1<x+1<3,\\ x-1>0,\end{cases}$ 解得 $1<x<2$.

14. $(-\frac{20}{3},+\infty)$　由题意可知 $\exists x\in[1,6]$，$a>-x-\frac{4}{x}$，则 $a>-\frac{20}{3}$.

15. 12400　由题意可知 $\{a_n\}$ 是首项为 3，公差为 10 的等差数列，则数列 $\{a_n\}$ 的前 50 项和是 $50\times 3+\frac{50\times 49}{2}\times 10=12400$.

16. $(-\infty,\frac{59}{16}]$　由 $x^2+ax+a^2\geqslant x+am-1$,得 $x^2+(a-1)x+a^2-am+1\geqslant 0$.由题意可得 $\exists a\in[2,4]$,使得 $(a-1)^2-4(a^2-am+1)\leqslant 0$ 成立,即 $\exists a\in[2,4]$,使得 $m\leqslant\frac{3a}{4}+\frac{3}{4a}+\frac{1}{2}$ 成立.

因为 $\exists a\in[2,4]$,所以 $\frac{3a}{4}+\frac{3}{4a}\leqslant\frac{3\times4}{4}+\frac{3}{4\times4}=\frac{51}{16}$,故 $m\leqslant\frac{59}{16}$.

17. 解:(1)因为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2-bx+2$,所以 $f'(x)=x^2-2ax-b$, …………………… 1分

则 $\begin{cases}f'(3)=9-6a-b=0,\\ f(3)=\frac{1}{3}\times3^3-9a-3b+2=-7,\end{cases}$ …………………… 3分

解得 $a=1,b=3$. …………………… 5分

(2)由(1)可知 $f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$. …………………… 6分

由 $f'(x)>0$,得 $x<-1$ 或 $x>3$,由 $f'(x)<0$,得 $-1<x<3$, …………………… 7分

则 $f(x)$在$(-\infty,-1)$和$(3,+\infty)$上单调递增,在$(-1,3)$上单调递减. …………………… 8分

因为 $f(-4)=-\frac{70}{3},f(-1)=\frac{11}{3},f(3)=-7,f(4)=-\frac{14}{3}$,

所以 $f(x)_{\max}=f(-1)=\frac{11}{3},f(x)_{\min}=f(-4)=-\frac{70}{3}$. …………………… 10分

18. 解:(1)由题意可得 $f(-1)=\log_3(-1+4)-\log_3(a+1)=1-\log_3(a+1)=-1$,则 $a=8$.
…………………… 2分

从而 $\begin{cases}x+4>0,\\ 8-x>0,\end{cases}$ 解得 $-4<x<8$, …………………… 4分

故 $f(x)$的定义域为$(-4,8)$. …………………… 5分

(2)由题意可得 $f(2-x)=\log_3(6-x)-\log_3(6+x)$,$f(2)=\log_3 6-\log_3 6=0$, …………………… 7分

因为 $f(2-x)\geqslant f(2)$,所以 $\log_3(6-x)-\log_3(6+x)\geqslant 0$,即 $\log_3(6-x)\geqslant\log_3(6+x)$, …
…………………… 8分

则 $\begin{cases}6-x>0,\\ 6+x>0,\\ 6-x\geqslant 6+x,\end{cases}$ 解得 $-6<x\leqslant 0$. …………………… 11分

故不等式 $f(2-x)\geqslant f(2)$的解集为$(-6,0]$. …………………… 12分

19. 解:(1)因为 $S_{n+1}=3S_n+2$,所以 $S_{n+1}+1=3(S_n+1)$. …………………… 1分

因为 $a_1=2$,所以 $S_1=2$,所以 $S_1+1=3$, …………………… 2分

则$\{S_n+1\}$是首项和公比都是 3 的等比数列, …………………… 3分

故 $S_n+1=3^n$,即 $S_n=3^n-1$. …………………… 4分

当 $n\geqslant 2$ 时,$S_{n-1}=3^{n-1}-1$,则 $a_n=S_n-S_{n-1}=2\times3^{n-1}(n\geqslant 2)$. …………………… 5分

当 $n=1$ 时,$a_1=2$ 满足上式,则 $a_n=2\times3^{n-1}$. …………………… 6分

(2)由(1)可得 $b_n=2n\times3^{n-1}$, …………………… 7分

则 $T_n=2+4\times3+6\times3^2+\cdots+2n\times3^{n-1}$,① …………………… 8分

从而 $3T_n=2\times3+4\times3^2+6\times3^3+\cdots+2(n-1)\times3^{n-1}+2n\times3^n$,② …………………… 9分

由①−②,得 $-2T_n=2+2\times3+2\times3^2+2\times3^3+\cdots+2\times3^{n-1}-2n\times3^n$, …………………… 10分

则 $-2T_n=(1-2n)\times3^n-1$,即 $T_n=\frac{(2n-1)\times3^n+1}{2}$. …………………… 12分

20. 解:(1)当 $0<x\leqslant 10$ 时,$y=12x-(\frac{1}{2}x^2+2x)-30=-\frac{1}{2}x^2+10x-30$; …………………… 2分

当 $10<x\leqslant 50$ 时,$y=12x-(14x+\frac{450}{x}-115)-30=-2x-\frac{450}{x}+85$. …………………… 4分

故 $y=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+10x-30,0<x\leqslant 10,\\ -2x-\frac{450}{x}+85,10<x\leqslant 50.\end{cases}$ …………………… 5分

(2)当 $0<x\leqslant 10$ 时,函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+10x-30$ 图象的对称轴为直线 $x=10$, …………………… 6分

所以 $y=-\frac{1}{2}x^2+10x-30$ 在$(0,10]$上单调递增, …………………… 7分

故 $y_{\max}=-\frac{1}{2}\times10^2+10\times10-30=20$(万元); …………………… 8分

当 $10<x\leqslant 50$ 时,$y=-2x-\frac{450}{x}+85=-(2x+\frac{450}{x})+85\leqslant-2\times30+85=25$,

当且仅当 $2x=\frac{450}{x}$,即 $x=15$ 时,等号成立. …………………… 10分

即当 $x=15$ 时,$y_{\max}=25$(万元). …………………… 11分

因为 $20<25$,所以当年代加工量为 15 万件时,该农民专业合作社为这一品牌服装代加工费的年利润最大,最大值为 25 万元. …………………… 12分

21. 解:(1)因为 $a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2)$,所以 $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2)$,则$\{a_n\}$是等差数列.
…………………… 1分

设数列$\{a_n\}$的公差为 d,由 $\begin{cases}a_3=3,\\ a_4+a_8=12,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a_1+2d=3,\\ 2a_1+10d=12,\end{cases}$ …………………… 2分

解得 $a_1=d=1$,则 $a_n=n$. …………………… 4分

因为 b_k 为满足 $k\leqslant a_n\leqslant 2^k$ 的 a_n 的个数,所以 $b_k=2^k-k+1$,

则 $b_2=3,b_3=6$. …………………… 6分

(2)由(1)可得 $c_n=\frac{2^n-1}{(2^n-n+1)(2^{n+1}-n)}=\frac{1}{2^n-n+1}-\frac{1}{2^{n+1}-n}$, …………………… 7分

则 $T_n=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})+\cdots+(\frac{1}{2^n-n+1}-\frac{1}{2^{n+1}-n})=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}-n}$. …………………… 8分

设 $f(n)=2^{n+1}-n$,则 $f(n+1)-f(n)=2^{n+1}-1>0$,故 $T_n\geqslant T_1=\frac{1}{6}$. …………………… 10分

因为对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$,不等式 $3m^2-4m\leqslant 6(T_n+1)$恒成立,所以对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$,不等式

$3m^2-4m\leqslant 6\times(\frac{1}{6}+1)$恒成立，即对任意的 $n\in \mathbf{N}_+$，不等式 $3m^2-4m-7\leqslant 0$ 恒成立，

即$(3m-7)(m+1)\leqslant 0$ 恒成立，解得$-1\leqslant m\leqslant \frac{7}{3}$，即 m 的取值范围是$[-1,\frac{7}{3}]$. …… 12 分

22. 解：(1)由题意可得 $f'(x)=(2x-\ln x-\frac{1}{x}-a+2)e^x$， …… 1 分

则 $f'(1)=(3-a)e=2e$，解得 $a=1$. …… 3 分

经检验，$a=1$ 符合题意. …… 4 分

(2)当 $a=\ln 6$ 时，$f'(x)=(2x-\ln x-\frac{1}{x}-\ln 6+2)e^x$.

设 $g(x)=2x-\ln x-\frac{1}{x}-\ln 6+2$，则 $g'(x)=2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{2x^2-x+1}{x^2}\geqslant 0$，

故 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. …… 6 分

因为 $g(\frac{1}{2})=1+\ln 2-\ln 6<0$，$g(\frac{2}{3})=\frac{4}{3}-\ln\frac{2}{3}-\frac{3}{2}-\ln 6+2=\frac{11}{6}-2\ln 2>0$，

所以存在唯一的 $x_0\in(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$，使得 $g(x_0)=0$. …… 8 分

当 $x\in(0,x_0)$时，$f'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，

则 $f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，

故 $f(x)_{\min}=f(x_0)=e^{x_0}(2x_0-\ln x_0-\ln 6)=e^{x_0}(\frac{1}{x_0}-2)$. …… 9 分

设 $h(x_0)=e^{x_0}(\frac{1}{x_0}-2)$，则 $h'(x_0)=e^{x_0}(\frac{1}{x_0}-2-\frac{1}{x_0^2})=\frac{-e^{x_0}(2x_0^2-x_0+1)}{x_0^2}<0$，…… 10 分

所以 $h(x_0)$在$(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$上单调递减，所以 $h(\frac{2}{3})<h(x_0)<h(\frac{1}{2})$，即$-\frac{e^{\frac{2}{3}}}{2}<h(x_0)<0$，

即 $f(x)_{\min}\in(-1,0)$. …… 11 分

因为对任意的 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)>k$ 恒成立，且 k 为整数，所以 $k\leqslant -1$，则 $k_{\max}=-1$. ……

…… 12 分