保密★启用前

# 2023年普通高等学校招生全国统一模拟考试

# 数　学

2023.5

**注意事项：**

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名和准考证号等填写在试卷和答题卡指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. 已知 $\mathbf{R}$ 为实数集，全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\,|\,|x-1|<2\}$，$B=\{x\,|\,x\geqslant 1\}$，则 $\complement_U(A\cap B)=$

A. $\{x\,|\,-1\leqslant x<2\}$　　B. $\{x\,|\,x\leqslant 1$ 或 $x>3\}$

C. $\{x\,|\,1\leqslant x<3\}$　　D. $\{x\,|\,x<1$ 或 $x\geqslant 3\}$

2. 已知 i 为虚数单位，若 $\dfrac{(3+\mathrm{i})(a+2\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}$ 为实数，则实数 $a=$

A. $-1$　　B. 4

C. 2　　D. $-2$

3. 函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^x+x+\mathrm{e}$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为

A. $y=x$　　B. $y=2x-1$

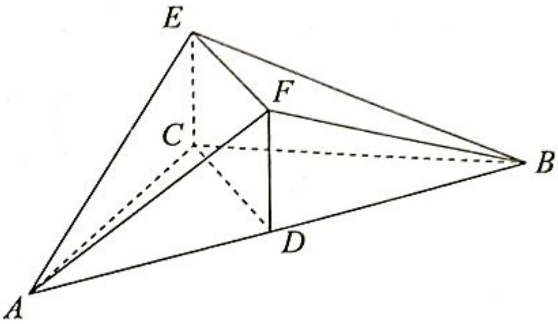
C. $y=\mathrm{e}x-\mathrm{e}+1$　　D. $y=-\mathrm{e}x+\mathrm{e}+1$

4. 已知 $0<x_1<x_2<2\pi$，$\sin x_1=\sin x_2=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos(x_1-x_2)=$

A. $\dfrac{7}{9}$　　B. $-\dfrac{7}{9}$

C. $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$　　D. $-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

5. 风筝又称为“纸鸢”，由中国古代劳动人民发明于距今 2000 多年的东周春秋时期. 相传墨翟以木头制成木鸟，研制三年而成，是人类最早的风筝起源. 如图，是某高一年级学生制作的一个风筝模型的多面体 $ABCEF$，$D$ 为 $AB$ 的中点，四边形 $EFDC$ 为矩形，且 $DF\perp AB$，$AC=BC=2$，$\angle ACB=120°$，当 $AE\perp BE$ 时，多面体 $ABCEF$ 的体积为




A. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{6}$

6. 已知 $F$ 为抛物线 $C: y^2=3x$ 的焦点，过 $F$ 的直线 $l$ 与抛物线 $C$ 交于 $A$，$B$ 两点，若 $|AF|=\lambda|BF|=\lambda$，则 $\lambda=$

A. 1　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. 3　　D. 4

7. 已知△$ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，$M$，$N$ 是△$ABC$ 边上的两个动点，若线段 $MN$ 将△$ABC$ 分成面积相等的两部分，则线段 $MN$ 长度的最小值为

A. $\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1

8. 已知函数 $f(x)=\ln(e^{2x}+e^2)-x$，若 $a=f(e^{\frac{1}{3}})$，$b=f\left(\dfrac{1}{3}\right)$，$c=f\left(\dfrac{4}{3}\right)$，则

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

**二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.**

9. 一组互不相等的样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，其平均数为 $\overline{x}$，方差为 $s^2$，极差为 $m$，中位数为 $n$，去掉其中的最小值和最大值后，余下数据的平均数为 $\overline{x'}$，方差为 $s'^2$，极差为 $m'$，中位数为 $n'$，则下列选项一定正确的有

A. $n=n'$　　B. $\overline{x}=\overline{x'}$　　C. $s^2>s'^2$　　D. $m>m'$

10. 已知 $S_n$ 是数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，$a_1=8$，则下列递推关系中能使 $S_n$ 存在最大值的有

A. $a_{n+1}=-2a_n$　　B. $a_{n+1}=a_n-2$　　C. $a_{n+1}=a_n-n$　　D. $a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}$

11. 关于函数 $f(x)=|\sin x|+\dfrac{1}{\sin|x|}$，下列选项正确的有

A. $f(x)$ 为偶函数

B. $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递增

C. $f(x)$ 的最小值为 2

D. $f(x)$ 在区间 $(-\pi,4\pi)$ 上有两个零点

12. 已知 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 是圆 $x^2+y^2=1$ 上不同的两点，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>1)$ 的右顶点和上顶点分别为 $A,B$，直线 $AP,BQ$ 分别是圆 $x^2+y^2=1$ 的两条切线，$e$ 为椭圆 $C$ 的离心率. 下列选项正确的有

A. 直线 $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ 与椭圆 $C$ 相交

B. 直线 $ax+by=1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相交

C. 若椭圆 $C$ 的焦距为 2，$AP,BQ$ 两直线的斜率之积为 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

D. 若 $AP,BQ$ 两直线的斜率之积为 $\dfrac{1}{2}$，则 $e\in\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

**三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

13. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为单位向量，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，向量 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与向量 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\theta$，则 $\cos\theta=$________.

14. $\left(x+\dfrac{2}{x^2}\right)(1+2x)^5$ 展开式中 $x^3$ 的系数是________.

15. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=4\sqrt{2}$，则四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的表面积为________；若点 $Q$ 是线段 $AC$ 上的动点，则 $|PQ|+|QB|$ 的最小值为________.（第一空 2 分，第二空 3 分）

16. 已知 $\dfrac{y}{e^y-1}=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$，若关于 $x$ 的方程 $1+x=ay(a\neq 0)$ 无解，则实数 $a$ 的取值范围是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $3+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}=\frac{2n+3}{2^n}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 记数列 $\left\{\frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}\right\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，证明：$S_n<\frac{1}{2}$.

18.（本小题满分 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，内角 $A,B,C$ 的对边分别为 $a,b,c$，$b^2+c^2=3bc\cos A$.

(1) 若 $B=C$，$a=2$，求 $\triangle ABC$ 的面积；

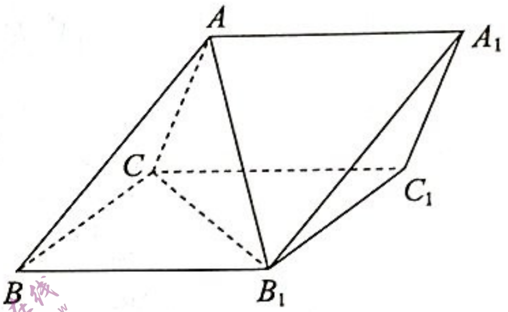
(2) 求 $\frac{\tan A}{\tan B}+\frac{\tan A}{\tan C}$ 的值.

19.(本小题满分 12 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧面 $BB_1C_1C$ 为菱形,$\angle CBB_1=60^\circ$,$AB=BC=2$,$AC=AB_1=\sqrt{2}$.

(1)证明:平面 $ACB_1\perp$平面 $BB_1C_1C$;

(2)求平面 $ACC_1A_1$ 与平面 $A_1B_1C_1$ 夹角的余弦值.




20.(本小题满分 12 分)

甲、乙两人进行象棋比赛,赛前每人发 3 枚筹码.一局后负的一方,需将自己的一枚筹码给对方;若平局,双方的筹码不动,当一方无筹码时,比赛结束,另一方最终获胜.由以往两人的比赛结果可知,在一局中甲胜的概率为 0.3、乙胜的概率为 0.2.

(1)第一局比赛后,甲的筹码个数记为 $X$,求 $X$ 的分布列和期望;

(2)求四局比赛后,比赛结束的概率;

(3)若 $P_i(i=0,1,\cdots,6)$表示"在甲所得筹码为 $i$ 枚时,最终甲获胜的概率",则 $P_0=0$,$P_6=1$.证明:$\{P_{i+1}-P_i\}(i=0,1,2,\cdots,5)$为等比数列.

21.(本小题满分 12 分)

已知点 $P(4,3)$为双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上一点,$E$ 的左焦点 $F_1$ 到一条渐近线的距离为$\sqrt{3}$.

(1)求双曲线 $E$ 的标准方程;

(2)不过点 $P$ 的直线 $y=kx+t$ 与双曲线 $E$ 交于 $A,B$ 两点,若直线 $PA,PB$ 的斜率和为 1,证明:直线 $y=kx+t$ 过定点,并求该定点的坐标.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x^2+2\cos x$,$f'(x)$为函数 $f(x)$的导函数.

(1)讨论函数 $f(x)$的单调性;

(2)已知函数 $g(x)=f'(x)-5x+5a\ln x$,存在 $g(x_1)=g(x_2)(x_1\neq x_2)$,证明:$x_1+x_2>2a$.