2022~2023学年下学期大理州普通高中质量监测
高二数学参考答案

第Ⅰ卷（选择题，共60分）

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	C	C	B	D	B	A

【解析】

1．由 $A=\{x\,|\,\log_2 x\leqslant 0\}=\{x\,|\,0<x\leqslant 1\}$，集合 $B=\{x\,|\,x^2\leqslant 4\}=\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant 2\}$，则 $A\cap B=(0,\ 1]$，故选A.

2．由 $-1+\mathrm{i}$ 和 $1-\mathrm{i}$ 对应的点分别为 $(-1,\ 1)$ 和 $(1,\ -1)$，故两点之间的距离为 $2\sqrt{2}$，故选D.

3．由 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为单位向量，且 $(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-3\vec{b})$，则 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})=|\vec{a}|^2-3|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=-2-2\cos\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle=0$，故 $\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle=\pi$，故选C.

4．∵正六棱台的上下底面边长分别为1和2，则 $S_1=6\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$S_2=6\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$，故 $V=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h=\frac{1}{3}\times\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+3\sqrt{3}+6\sqrt{3}\right)\times\sqrt{3}=\frac{21}{2}$，故选C.

5．从甲、乙、丙、丁、戊五名同学中选2人的基本事件有（甲、乙），（甲、丙），（甲、丁），（甲、戊），（乙、丙），（乙、丁），（乙、戊），（丙、丁），（丙、戊），（丁、戊），共10种，甲被选中的基本事件有（甲、乙），（甲、丙），（甲、丁），（甲、戊），共4种，所以甲被选中的概率为 $P=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$，故选B.

6．对于函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$，设 T 为 $f(x)$ 的最小正周期. 又 $f\left(-\frac{\pi}{10}\right)=0$，对任意的 x 都有 $f(x)\leqslant\left|f\left(\frac{2}{5}\pi\right)\right|$，则 $\frac{2}{5}\pi-\left(-\frac{\pi}{10}\right)=\frac{\pi}{2}=\frac{2k+1}{4}T$，$k\in\mathbf{N}$，故 $T=\frac{2\pi}{2k+1}$，从而 $\omega=2k+1$，$k\in\mathbf{N}$；$0<\omega<2$，故 $\omega=1$；当 $\omega=1$ 时，$f\left(-\frac{\pi}{10}\right)=0$，$0<\varphi<\pi$，故 $-\frac{\pi}{10}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，$\varphi=\frac{3\pi}{5}$，$f(x)=\cos\left(x+\frac{3\pi}{5}\right)$，$f\left(\frac{2\pi}{5}\right)=-1$，$f\left(-\frac{3\pi}{5}\right)=1$，故选D.

7．取 BC 的中点 O，连接 AO，OP，由题可得 $BC=2$，$AO=BO=CO=PO=1$，则 O 是三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心，三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径为 1，故三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 $4\pi\cdot1^2=4\pi$，故选 B．

8．因为 $\sin3=\sin(\pi-3)<\pi-3<\frac{1}{5}<e^{-\frac{4}{5}}$，故 $a<b<c$，故选 A．

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	BC	AD	AC	ABC

【解析】

9．由 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$S_5=5$，$a_4=3$，设该等差数列公差为 d，则 $S_5=5a_1+10d=5$，$a_4=a_1+3d=3$，解得 $a_1=-3，d=2$，$a_n=2n-5$，$S_n=n^2-4n$，故选 BC．

10．对于 A，$\because(0.005+0.010+0.015+x+0.040)\times10=1$，$\therefore x=0.030$，A 正确；对于 B，平均成绩为 $55\times0.05+65\times0.1+75\times0.15+85\times0.3+95\times0.4=84$，B 错误；对于 C，由于 $0.05+0.1+0.15+0.3>0.5$，故中位数小于 90，C 错误；对于 D，由题意得，D 正确，故选 AD.

11．将 $A(1，2)$ 代入抛物线 C 中，得 $p=2$，则抛物线 C 为 $y^2=4x$，故抛物线 C 的准线方程为 $x=-1$，故 A 正确；当过抛物线 C 的焦点且与 x 轴垂直时弦长最短，此时弦长为 4，故 B 错误；设直线 MN 为 $x=my+n$，$M\left(\frac{y_1^2}{4}，y_1\right)$，$N\left(\frac{y_2^2}{4}，y_2\right)$，联立抛物线可得，$y^2-4my-4n=0$，$\therefore y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4n$．$\because AM\perp AN$，$\therefore\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=\left(\frac{y_1^2}{4}-1，y_1-2\right)\cdot\left(\frac{y_2^2}{4}-1，y_2-2\right)=\frac{(y_1^2-4)(y_2^2-4)}{16}+(y_1-2)(y_2-2)=0$，$\because y_1\neq2$，$y_2\neq2$，$\therefore(y_1-2)(y_2-2)\neq0$，$\therefore\frac{(y_1+2)(y_2+2)}{16}+1=0$，化简整理可得，$y_1y_2+2(y_1+y_2)+20=0$，$\therefore-4n+8m+20=0$，得 $n=2m+5$，$S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}\frac{|4m+4|}{\sqrt{m^2+1}}\sqrt{m^2+1}\sqrt{16m^2+32m+80}=8\sqrt{(m+1)^2[(m+1)^2+4]}$，$\therefore$ 直线 MN 为 $x=m(y+2)+5$，$\therefore$ 直线 MN 过定点 $P(5，-2)$，故 C 正确；若直线 MN 过点 $(1，-1)$，直线 MN 为 $x+4y+3=0$，此时三角形 AMN 的面积为 $24\sqrt{13}$，故 D 错误，故选 AC．

12．由 $g(x+1)$ 为偶函数得 $g(x+1)=g(-x+1)$，可得 $g(x)$ 关于 $x=1$ 对称，故 A 正确；因为 $f(x+1)-g(1-x)=2$，所以 $f'(x+1)+g'(1-x)=0$，所以 $f'(x-1)+g'(3-x)=0$．又 $f'(x-1)=g'(x+1)$，所以 $g'(x+1)+g'(3-x)=0$，故 $g'(2+x)+g'(2-x)=0$，所以函数 $g'(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称，故 B 正确；因为 $f'(x+1)+f'(-x-1)=0$，所以 $f'(x)=-f'(-x)$，故 D 错误；因为 $f'(x-1)=g'(x+1)$，所以 $[f(x-1)-g(x+1)]'=0$，所以 $f(x-1)-g(x+1)=c$，c 为常数，因为 $f(x+1)-g(1-x)=2$，所以 $f(x-1)-g(3-x)=2$，所以 $g(x+1)-g(3-x)=2-c$，取 $x=1$，可得 $c=2$，所以 $g(x+1)=g(3-x)$．又 $g(x+1)=g(-x+1)$，所以 $g(3-x)=g(-x+1)$，所以 $g(x+2)=g(x)$，故 2 为函数 $g(x)$ 的周期，故 C 正确，故选 ABC．

第Ⅱ卷（非选择题，共 90 分）

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	27	$2\sqrt{2}$	$\left(0,\ \dfrac{8}{e^2}\right)$	$\dfrac{1}{5}$

【解析】

13．由题意得高二学生人数为 $2800\times0.32=896$，高三学生人数为 $896+112=1008$，高三抽取的人数为 $75\times\dfrac{1008}{2800}=27$.

14．圆 $x^2+y^2+2x-2=0$ 的圆心为 $(-1,0)$，半径为 $\sqrt{3}$，圆心到直线 $x+\sqrt{3}y-1=0$ 的距离为 $\dfrac{|-1+0-1|}{2}=1$，则 $|AB|=2\sqrt{3-1}=2\sqrt{2}$.

15．$2x^2+3=ae^x+3$，得 $a=\dfrac{2x^2}{e^x}$，设 $h(x)=\dfrac{2x^2}{e^x}$，则 $h'(x)=\dfrac{2x(2-x)}{e^x}$，由 $h'(x)>0$，可得 $0<x<2$，由 $h'(x)<0$，可得 $x>2$ 或 $x<0$，∴ $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(-\infty,0)$，$(2,+\infty)$ 上单调递减，$h(0)=0$，$h(2)=\dfrac{8}{e^2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)\to+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\to0$，∴实数 a 的取值范围为 $\left(0,\ \dfrac{8}{e^2}\right)$.

16．设内切圆半径为 r，取线段 AF_1 的中点 N，$3\overrightarrow{MF_1}+2\overrightarrow{MF_2}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$，所以 $2\overrightarrow{MO}=-\overrightarrow{MN}$，则 $|MN|=2|MO|$，$\dfrac{S_{\triangle AMF_1}}{S_{\triangle MF_1F_2}}=2$，$\dfrac{S_{\triangle AMF_2}}{S_{\triangle MF_1F_2}}=3$，又 $\dfrac{S_{\triangle AMF_1}+S_{\triangle AMF_2}}{S_{\triangle MF_1F_2}}=\dfrac{|AF_1|\cdot r+|AF_2|\cdot r}{|F_1F_2|\cdot r}=\dfrac{a}{c}=5$，

∴ $e=\dfrac{1}{5}$.

四、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

（Ⅰ）证明：因为 $a_{n+1}=2a_n+1$，

所以 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$. ……（2 分）

因为 $a_1+1=2$，

∴数列 $\{a_n+1\}$ 为首项为 2，公比为 2 的等比数列，

∴ $a_n+1=2^n$，即：$a_n=2^n-1$. ……（5 分）

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）知：$a_n=2^n-1$，

∴ $S_n=(2^1+2^2+\cdots+2^n)-n$,

$S_n=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-2-n$. ……（10 分）

18．（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）因为 $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$，

所以 $a^2+b^2-c^2=ab$， ……（2 分）

所以 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{2}$. ……（4 分）

又 $0<C<\dfrac{\pi}{2}$，

则 $C=\dfrac{\pi}{3}$. ……（6 分）

（Ⅱ）因为△ABC 为锐角三角形，且 $\begin{cases}0<B<\dfrac{\pi}{2},\\ 0<\pi-B-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$

得 $\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$， ……（8 分）

所以 $\dfrac{\sin A}{\cos B}=\dfrac{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-B\right)}{\cos B}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\dfrac{1}{2}\sin B}{\cos B}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\tan B$. ……（10 分）

因为 $\tan B\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$，所以 $\dfrac{\sin A}{\cos B}$ 的取值范围为 $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$. ……（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

解：记“甲选手正确回答第 i 轮问题”为事件 $A_i(i=1, 2, 3)$，则 $P(A_1)=\frac{4}{5}$， $P(A_2)=\frac{3}{4}$，

$P(A_3)=\frac{2}{3}$.

“乙选手正确回答第 i 轮问题”为事件 $B_i(i=1, 2, 3)$，则 $P(B_1)=\frac{2}{3}$，$P(B_2)=\frac{2}{3}$，$P(B_3)=\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）甲选手进入第三轮才被淘汰的概率为

$P(A_1A_2\overline{A}_3)=P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{5}$. ……………………………（6 分）

（Ⅱ）至少有一名选手通过全部考核的概率为 $1-(1-P(A_1A_2A_3))\cdot(1-P(B_1B_2B_3))=$

$1-\left(1-\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{8}{15}$. ……………………………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）证明：因为 $CC_1 /\!/ AA_1$， $AB\perp AA_1$，所以 $CC_1\perp AB$.

连接 AM，AC_1，由题意知 $\triangle ACC_1$ 是等边三角形，点 M 为棱 CC_1 的中点，所以 $CC_1\perp AM$.

又 AB， $AM\subset$ 平面 ABM， $AB\cap AM=A$，

所以 $CC_1\perp$ 平面 ABM. ……………………………………………………………（4 分）

又 $AT\subset$ 平面 ABM，所以 $CC_1\perp AT$. ……………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）解： $AB\perp CC_1$， 又 $AB\perp BC$，

且 CC_1， $BC\subset$ 平面 B_1BCC_1， $CC_1\cap BC=C$， 所以 $AB\perp$ 平面 B_1BCC_1.

在等边三角形 ACC_1 中， $AC=2\sqrt{3}$， 于是 $AM=3$，

①若点 T 恰好为点 B，

$\theta=\frac{\pi}{2}$，从而 $\sin\theta=1$; ……………………………………………………………（9 分）

②若点 T 不为点 B， $\theta=\angle ATB$，

$AT=\sqrt{AB^2+BT^2}\in(\sqrt{3}, 3]$， $\therefore\sin\theta=\frac{AB}{AT}\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$，

综上所述，$\sin\theta$ 的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right]$. ……………………………………………（12 分）

21.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）曲线 C 的虚轴的端点与其焦点的距离为 $2\sqrt{7}$，

所以 $\begin{cases} a^2=4, \\ b^2+c^2=28, \\ a^2+b^2=c^2, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a^2=4, \\ b^2=12, \\ c^2=16, \end{cases}$ ……………………………………………………（5 分）

则所求的双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1.$ ……………………………………………（6 分）

（Ⅱ）因为直线 l：$x+my-t=0$ 过点 $F_2(4,\ 0)$，所以 $t=4$，

由 $|MF_1|=|F_1F_2|=8$，$|MF_1|-|MF_2|=2a=4$，

得：等腰三角形 F_1MF_2 底边 MF_2 上的高的大小为 $2\sqrt{15}$，……………………………（9 分）

$\tan\angle MF_2F_1=\sqrt{15}$，

即 $\left|\dfrac{1}{m}\right|=\sqrt{15}$，则 $m=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{15}$，故 l：$x\pm\dfrac{\sqrt{15}}{15}y-4=0.$ ………………………………（12 分）

22.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）由题意知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,\ +\infty)$，$f'(x)=2x+\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x^2+a}{x}(x>0)$，

当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上恒成立，

故 $f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增；……………………………………………………（3 分）

当 $a<0$ 时，由 $f'(x)<0$，得 $0<x<\dfrac{\sqrt{-2a}}{2}$，由 $f'(x)>0$，得 $x>\dfrac{\sqrt{-2a}}{2}$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{-2a}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{\sqrt{-2a}}{2},\ +\infty\right)$ 上单调递增，

综上，当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{-2a}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{\sqrt{-2a}}{2},\ +\infty\right)$ 上单调递增.

……………………………………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）当 $a=-2$ 时，$f(x)=x^2-2\ln x$ 在 $(0,\ 1)$ 上单调递减.

不妨设 $x_1>x_2$，则 $x_1^2>x_2^2$ 且 $f(x_1)<f(x_2)$，

$\therefore \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_1^2-x_2^2}<\dfrac{\lambda}{x_1^2\cdot x_2^2}$，

$\therefore f(x_2)-f(x_1)<\lambda\left(\frac{1}{x_2^2}-\frac{1}{x_1^2}\right)$,

$\therefore f(x_2)-\lambda\frac{1}{x_2^2}<f(x_1)-\lambda\frac{1}{x_1^2}$. ……………………………………………（8 分）

令 $g(x)=f(x)-\lambda\frac{1}{x^2}$，则 $g(x_2)<g(x_1)$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 上单调递增，

$\therefore g'(x)=\frac{2x^2-2}{x}+\frac{2\lambda}{x^3}\geqslant 0$，在 $(0,\ 1)$ 上恒成立， ……………………………………（10 分）

$\therefore \lambda\geqslant -x^2(x^2-1)$ 在 $(0,\ 1)$ 上恒成立.

令 $t=x^2\in(0,\ 1)$，则 $-t(t-1)\in\left(0,\ \frac{1}{4}\right]$，

$\therefore \lambda\geqslant\frac{1}{4}$，

故实数 λ 的取值范围为 $\left[\frac{1}{4},\ +\infty\right)$. ……………………………………………………（12 分）