参考答案及多维细目表

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	A	C	B	D	C	B	ACD	AC	BCD	ACD

1.【答案】B

【解析】由题意可得 $z=\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(1+\mathrm{i})^2}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\mathrm{i}$，可得 $z^{4k}=1,z^{4k+1}=\mathrm{i},z^{4k+2}=-1,z^{4k+3}=-\mathrm{i},k\in\mathbf{N}$，则 $z^{4k}+z^{4k+1}+z^{4k+2}+z^{4k+3}=0,k\in\mathbf{N}$，故 $1+z+z^2+\cdots+z^{2\,023}=(1+z+z^2+z^3)+\cdots+(z^{2\,020}+z^{2\,021}+z^{2\,022}+z^{2\,023})=0$. 故选 B.

2.【答案】C

【解析】∵$B\subseteq(A\cap B)$，∴$B\subseteq A$，

①当 $B=\varnothing$ 时，满足 $B\subseteq A$，此时 $-a\geqslant a+4$，解得 $a\leqslant-2$；

②当 $B\neq\varnothing$ 时，由 $B\subseteq A$，得 $\begin{cases}-a<a+4\\-a\geqslant1\\a+4<5\end{cases}$，解得 $-2<a\leqslant-1$；

综上所述，$a\leqslant-1$，故选 C.

3.【答案】A

【解析】$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，$|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{c}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{1+\lambda^2}$，

$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|}=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$，当 $\lambda=\pm\sqrt{3}$ 时，

$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\frac{1}{2}$，即 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 夹角为 $\frac{\pi}{3}$，

故 $\lambda=\sqrt{3}$ 是 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的充分不必要条件. 故选 A.

4.【答案】C

【解析】由 $\frac{S_n}{n}>\frac{S_{n+1}}{n+1}$ 得 $\frac{n(a_1+a_n)}{2n}>\frac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2(n+1)}$，即 $a_n>a_{n+1}$，∴数列 $\{a_n\}$ 为递减的等差数列，

∵$\frac{a_{18}}{a_{17}}<-1$，∴$a_{17}>0,a_{18}<0$，

∴当 $n\leqslant17$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_n>0$；当 $n\geqslant18$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_n<0$；

∴S_n 有最大值，最大值为 S_{17}. 故选 C.

5.【答案】B

【解析】由 $c^2=a(a+b)$，得 $c^2=a^2+ab$，

由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，∴$a^2+ab=a^2+b^2-2ab\cos C$，即 $a+2a\cos C=b$，

由正弦定理得 $\sin A+2\sin A\cos C=\sin B$，

∵$B=\pi-(A+C)$，

∴$\sin A+2\sin A\cos C=\sin(A+C)=\sin A\cdot\cos C+\cos A\sin C$，

即 $\sin A=\sin(C-A)$.

∵$c^2=a^2+ab$，∴$c>a$，∴$C-A>0$，

又△ABC 为锐角三角形，∴$0<C-A<\frac{\pi}{2}$，

∴$A=C-A$，解得 $C=2A$，

又 $0<A<\frac{\pi}{2},0<B=\pi-3A<\frac{\pi}{2},0<C=2A<\frac{\pi}{2}$，∴$\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{4}$，

∴$\frac{\sin^2A}{\sin(C-A)}=\frac{\sin^2A}{\sin A}=\sin A\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 故选 B.

6.【答案】D

【解析】第一个黄金三角形：△ABC 的底为 $BC=2$，由 $\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 可得腰长 $AB=\sqrt{5}-1=AC$；

第二个黄金三角形：△B_1CA 的底为 $AC=\sqrt{5}-1$，由 $\frac{B_1C}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 可得腰长 $B_1C=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{2}$；

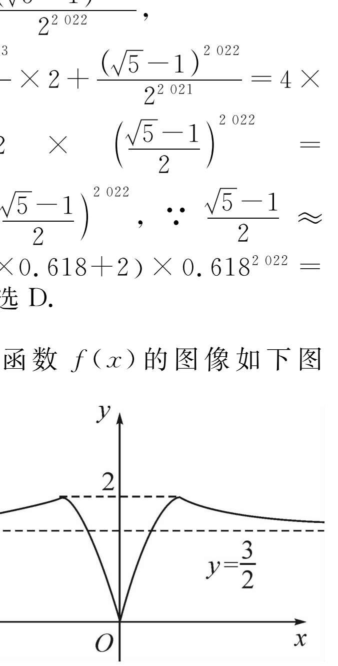
第三个黄金三角形：△C_1B_1C 的底为 $B_1C=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{2}$，由 $\frac{C_1C}{B_1C}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 可得腰长 $C_1C=\frac{(\sqrt{5}-1)^3}{2^2}$；…

以此类推，第 2 023 个黄金三角形的底为 $\frac{(\sqrt{5}-1)^{2\,022}}{2^{2\,021}}$，腰长为 $\frac{(\sqrt{5}-1)^{2\,023}}{2^{2\,022}}$，

∴周长为 $\frac{(\sqrt{5}-1)^{2\,023}}{2^{2\,022}}\times2+\frac{(\sqrt{5}-1)^{2\,022}}{2^{2\,021}}=4\times\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2\,023}+2\times\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2\,022}=\left(4\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\right)\times\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2\,022}$，∵$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$，∴原式 $=(4\times0.618+2)\times0.618^{2\,022}=4.472\times0.618^{2\,022}$. 故选 D.

7.【答案】C

【解析】由题意可知，函数 $f(x)$ 的图像如下图所示：



根据函数图像，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(0,1)$ 上单调递增，在 $(-1,0)$，$(1,+\infty)$ 上单调递减；

且 $x=\pm1$ 时取最大值 2，在 $x=0$ 时取最小值 0，$y=\frac{3}{2}$ 是部分图像的渐近线.

令 $f(x)=t$，则关于 x 的方程 $[f(x)]^2+2a\cdot f(x)+b=0\ (a,b\in\mathbf{R})$ 即可写成 $t^2+2at+b=0\ (a,b\in\mathbf{R})$，此时关于 t 的方程应该有两个不相等的实数根(其他情况不合题意)，

设 t_1,t_2 为方程的两个实数根，显然，有以下两种情况符合题意：

①当 $t_1\in\left(0,\frac{3}{2}\right]$，$t_2\in\left(\frac{3}{2},2\right)$时，此时$-2a=t_1+t_2\in\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$，则 $a\in\left(-\frac{7}{4},-\frac{3}{4}\right)$；

②当 $t_1=2$，$t_2\in\left(\frac{3}{2},2\right)$时，此时$-2a=t_1+t_2\in\left(\frac{7}{2},4\right)$，则 $a\in\left(-2,-\frac{7}{4}\right)$；

综上可知，实数 a 的取值范围是 $a\in\left(-2,-\frac{7}{4}\right)\cup\left(-\frac{7}{4},-\frac{3}{4}\right)$. 故选 C.

8.【答案】B

【解析】对于 A，依题意，过椭圆 Γ 的上顶点作 y 轴的垂线，过椭圆 Γ 的右顶点作 x 轴的垂线，则这两条垂线的交点在圆 C 上，

$\therefore a^2+b^2=\frac{4}{3}a^2$，得 $a^2=3b^2$，$\therefore$椭圆 Γ 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故 A 正确；

对于 B，$\because$点 M,P,Q 都在圆 C 上，且$\angle PMQ=90^\circ$，$\therefore PQ$ 为圆 C 的直径，$\therefore |PQ|=2\times\sqrt{\frac{4}{3}a^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}a$，

$\therefore\triangle MPQ$ 面积的最大值为$\frac{1}{2}|PQ|\times\sqrt{\frac{4}{3}a^2}=\frac{2\sqrt{3}a}{3}\times\sqrt{\frac{4}{3}a^2}=\frac{4}{3}a^2$，故 B 错误；

对于 C，解法一：设 $M(x_0,y_0)$，Γ 的左焦点为 $F(-c,0)$，连接 MF，

$\because c^2=a^2-b^2=\frac{2}{3}a^2$，

$\therefore |MF|^2=(x_0+c)^2+y_0^2=x_0^2+y_0^2+2x_0c+c^2=\frac{4}{3}a^2+2x_0\times\frac{\sqrt{6}}{3}a+\frac{2}{3}a^2=2a^2+\frac{2\sqrt{6}}{3}ax_0$，

又$-\frac{2\sqrt{3}}{3}a\leqslant x_0\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}a$，$\therefore |MF|^2\geqslant\frac{6-4\sqrt{2}}{3}a^2$，则 M 到 Γ 的左焦点的距离的最小值为$\frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{6})a}{3}$，故 C 正确；

解法二：M 为圆上的动点，M 到左焦点的距离的最小值就是 M 到圆心 O 的距离减去 O 到左焦点的距离，即为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}a-c=\frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{6})a}{3}$，故 C 正确；

对于 D，由直线 PQ 经过坐标原点，易得点 A,B 关于原点对称，

设 $A(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，则 $B(-x_1,-y_1)$，

$k_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，$k_2=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$，

又$\begin{cases}\frac{x_1^2}{3b^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{3b^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$两式相减得$\frac{x_1^2-x_2^2}{3b^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$，$\therefore\frac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2}=-\frac{1}{3}$，

又 $k_1k_2=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2}$，

$\therefore k_1k_2=-\frac{1}{3}$，故 D 正确. 故选 B.

9.【答案】ACD

【解析】对 A，根据分层抽样，分别从高一学生，高二学生，高三学生中抽取 40 人，30 人，30 人，故 A 正确；

对 B，抽取的高二年级每天的总读书时间为$\overline{x_2}\times 30=93$，抽取的高一年级每天的总读书时间为$\overline{x_1}\times 40=108$，高二年级每天的总读书时间比高一年级少 15 小时，故 B 错误；

对 C，被抽取的学生每天的读书时间的平均数为$\frac{40}{100}\times 2.7+\frac{30}{100}\times 3.1+\frac{30}{100}\times 3.3=3$(小时)，故 C 正确；

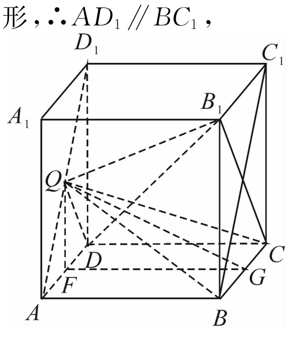
对 D，被抽取的学生每天的读书时间的方差为$\frac{40}{100}\times[1+(2.7-3)^2]+\frac{30}{100}\times[2+(3.1-3)^2]+\frac{30}{100}\times[3+(3.3-3)^2]=1.966$，$\therefore$估计全体学生每天的读书时间的方差为 $s^2=1.966$，故 D 正确. 故选 ACD.

10.【答案】AC

【解析】对 A，$V_{C_1\text{-}BDQ}=V_{Q\text{-}BDC_1}$，而 $S_{\triangle BDC_1}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot BC_1^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 8=2\sqrt{3}$ 为定值，

连接 BC_1，$\because AB\parallel C_1D_1$ 且 $AB=C_1D_1$，$\therefore$四边形 ABC_1D_1 是平行四边形，$\therefore AD_1\parallel BC_1$，

$\because AD_1\not\subset$平面 BDC_1，$BC_1\subset$平面 BDC_1，$\therefore AD_1\parallel$平面 BDC_1，$\therefore AD_1$ 上所有点到平面 BDC_1 的距离不变，$\therefore$三棱锥 $Q\text{-}BDC_1$ 的高不变，$\therefore V_{C_1\text{-}BDQ}=V_{Q\text{-}BDC_1}$ 为定值，故 A 正确；



对 B，若 $AD_1\perp$平面 BQC，$BC\subset$平面 BQC，则 $AD_1\perp BC$，又 $AD\parallel BC$，$\therefore AD_1\perp AD$，不成立，故 B 错误；

对 C，$\because BC$ 为定值，$\therefore$只要 Q 到 BC 的距离最长，过 Q 作 $QF\perp AD$ 于 F，过 F 作 $FG\perp BC$ 于 G，连接 QG，$\because AD\parallel BC$，$\therefore QF\perp BC$，又 $QF\cap FG=F$，$QF,FG\subset$平面 QFG，$\therefore BC\perp$平面 QFG，又 $QG\subset$平面 QFG，则 $QG\perp BC$，要使 QG 最长，只需 QF 最长，即 Q 点在 D_1 时，$QG=2\sqrt{2}$ 最长，此时 $S_{\triangle BQC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，故 C 正确；

对 D，当 Q 在 A 点时，$B\text{-}B_1CQ$ 为正三棱锥，设三棱锥 $B\text{-}B_1CQ$ 的内切球的半径为 r，

由等体积法：

$\frac{1}{3}(S_{\triangle B_1BC}+S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABB_1}+S_{\triangle AB_1C})\cdot r=V_{B_1\text{-}ABC}$，

$\therefore\frac{1}{3}\left(2+2+2+\frac{\sqrt{3}}{4}\times 8\right)\cdot r=\frac{1}{3}\times 2\times 2$，$\therefore r=$

$\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$，故 D 错误. 故选 AC.

11.【答案】BCD

【解析】设实际比赛局数为 x，则 $P(x=3)=p^3+(1-p)^3$，$P(x=4)=C_3^1p^3(1-p)+C_3^1p\cdot(1-p)^3$，$P(x=5)=C_4^2p^2(1-p)^2$，因此三局就结束比赛的概率为 $p^3+(1-p)^3$，故 A 错误；

$f(p)=3[p^3+(1-p)^3]+4[C_3^1p^3\cdot(1-p)+C_3^1p(1-p)^3]+5\times C_4^2p^2(1-p)^2$
$=6p^4-12p^3+3p^2+3p+3$，

由 $f(0)=3$，则常数项为 3，故 B 正确；

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=6\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^4-12\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+3\times\dfrac{1}{2}+3=\dfrac{33}{8}$，故 C 正确；

$f'(p)=24p^3-36p^2+6p+3$
$=3(2p-1)(4p^2-4p-1)$，

$\because 0\leqslant p\leqslant 1$，$\therefore 4p^2-4p-1<0$，

令 $f'(p)>0$，解得 $0\leqslant p<\dfrac{1}{2}$；令 $f'(p)<0$，解得 $\dfrac{1}{2}<p\leqslant 1$，

$\therefore$ 函数 $f(p)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right]$ 上单调递减，

$\because f(1-p)=3[(1-p)^3+p^3]+4[C_3^1\cdot(1-p)^3p+C_3^1(1-p)p^3]+5\times C_4^2(1-p)^2p^2=f(p)$，

$\therefore f(p)$ 关于 $p=\dfrac{1}{2}$ 对称，且 p 越极端，越可能快结束，有 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\leqslant\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{2}$，得 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)>f\left(\dfrac{5}{6}\right)$，则 D 正确. 故选 BCD.

12.【答案】ACD

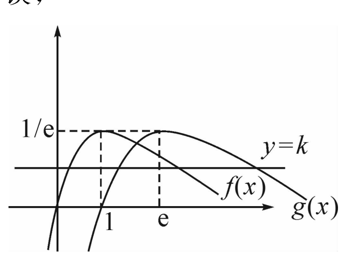
【解析】$f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$，令 $f'(x)>0$，解得 $x<1$，令 $f'(x)<0$，解得 $x>1$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，$(1,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1)=\dfrac{1}{e}$，

$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，令 $g'(x)<0$，解得 $x>e$，令 $g'(x)>0$，解得 $0<x<e$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，$(e,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore g(x)$ 在 $x=e$ 处取得极大值 $g(e)=\dfrac{1}{e}+b$，依据题意，$f(x)$ 和 $g(x)$ 有相同的极大值，故 $f(1)=g(e)$，解得 $b=0$，故 A 正确；

作出函数图象如下图所示，若 $f(x_1)=g(x_2)=k$，则 $k\leqslant\dfrac{1}{e}$，故 B 错误；



由图像可知，当 $k<0$ 时，$x_1<0$，$x_2<1$，$\therefore x_1+x_2<1$，C 正确；

对于 D，若 $x_1<x_2<x_3<x_4$ 时，则 $0<x_1<1$，$1<x_2<x_3<e$，$x_4>e$，

则有 $\dfrac{x_1}{e^{x_1}}=\dfrac{x_2}{e^{x_2}}=\dfrac{\ln x_3}{x_3}=\dfrac{\ln x_4}{x_4}=k$，$\therefore\dfrac{x_1}{e^{x_1}}=\dfrac{\ln x_3}{e^{\ln x_3}}=k$，可得 $x_1=\ln x_3$，同理可得 $x_2=\ln x_4$，

$\therefore e^{x_1+x_2}=x_3\cdot x_4$，故 D 正确. 故选ACD.

13.【答案】$-2\ 240$

【解析】$(x+2y-z)^8=[(x+2y)-z]^8$，$\because z$ 的指数是 3，$\therefore$ 得到 $C_8^3(x+2y)^5(-z)^3$，$\because y$ 的指数是 2，得到 $C_5^2x^3(2y)^2$，$\therefore x^3y^2z^3$ 项的系数为 $C_8^3(-1)^3C_5^2 2^2=-2\ 240$.

14.【答案】$\dfrac{5}{21}$

【解析】从甲箱中摸红球：掷到点数为 5 或 6 的概率为 $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$，再从甲箱中摸到红球的概率为 $\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$，故从甲箱中摸到红球的概率为 $P_1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$；

从乙箱中摸红球：掷到点数为 1,2,3,4 的概率为 $\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$，再从乙箱中摸到红球的概率为 $\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$，故从乙箱中摸到红球的概率为 $P_2=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{8}{15}$；

因此，摸到红球的概率为 $P=P_1+P_2=\dfrac{1}{6}+\dfrac{8}{15}=\dfrac{7}{10}$，

$\therefore$ 红球来自甲箱子的概率 $P=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{10}}=\dfrac{5}{21}$.

15.【答案】$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

【解析】设正四面体二面角 P-AB-C 平面角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，点 Q 到底面 ABC 的距离为 $|QH|$，点 Q 到定直线 AB 的距离为 d，则 $d=\dfrac{|QH|}{\sin\theta}$. 再由点 Q 到底面 ABC 的距离与到点 P 的距离之比为正常数 k，可得 $|PQ|=\dfrac{|QH|}{k}$，故 $\dfrac{|PQ|}{d}=\dfrac{\sin\theta}{k}$，

$\because$ 平面 PAB 内，点 P 为定点，直线 AB 为定直线，又动点 Q 的轨迹是抛物线，故 $\dfrac{|PQ|}{d}=1$，故 $k=\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

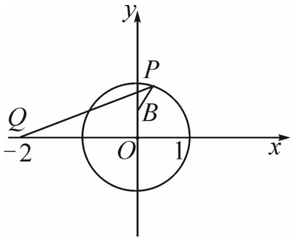
16.【答案】$\left[\dfrac{\sqrt{17}}{2}-\dfrac{5}{4},+\infty\right)$

【解析】

$\because 2\sqrt{\left(\cos\alpha+\dfrac{1}{2}\right)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{5+4\cos\alpha}=\sqrt{(\cos\alpha+2)^2+\sin^2\alpha}$，

则 $f(\alpha)=\sqrt{(\cos\alpha+2)^2+\sin^2\alpha}-\sqrt{\cos^2\alpha+\left(\sin\alpha-\dfrac{1}{2}\right)^2}$，

设 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$Q(-2,0)$，$B\left(0,\frac{1}{2}\right)$，如图，∴ $f(\alpha)=|PQ|-|PB|$，∴ $|PQ|-|PB|\leqslant|QB|$，当且仅当 P，Q，B 三点共线且 B 在



P，Q 之间时等号成立，又 $|QB|=\sqrt{4+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{17}}{2}$，故 $f(\alpha)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{17}}{2}$；

∵ $g(\alpha)=\cos\alpha-\sin\alpha+\sin 2\alpha+m$，

令 $\cos\alpha-\sin\alpha=x$，则 $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=x^2$，化简可得 $2\sin\alpha\cos\alpha=1-x^2=\sin 2\alpha$，

∴ $\cos\alpha-\sin\alpha+\sin 2\alpha=x+1-x^2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\leqslant\frac{5}{4}$，∴ $g(\alpha)\leqslant\frac{5}{4}+m$，

又 $\forall\alpha$，$\exists\beta$ 使 $f(\alpha)\leqslant g(\beta)$ 成立，∴ $f(\alpha)_{\max}\leqslant g(\beta)_{\max}$，∴ $\frac{\sqrt{17}}{2}\leqslant\frac{5}{4}+m$，故 $m\geqslant\frac{\sqrt{17}}{2}-\frac{5}{4}$.

17.【解析】(1)图像的最高点为 $S(6,4\sqrt{3})$，且 $A>0$，∴ $A=4\sqrt{3}$，根据图像可知 $\frac{T}{4}=6$，则 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=24$，$\omega>0$，解得 $\omega=\frac{\pi}{12}$，∴ $y=A\sin\omega x$ 的解析式为 $y=4\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{12}x$，

令 $x=8$，得 $y=6$ 即 M 的坐标为 $(8,6)$，

∴ $|MP|=\sqrt{(16-8)^2+(0-6)^2}=10$，

综上，$A=4\sqrt{3}$，$\omega=\frac{\pi}{12}$，M、P 两点之间的距离为 10. ………………………………………… 5 分

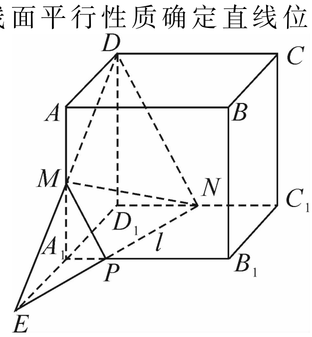
(2)在 $\triangle MNP$ 中，$|MP|=10$，$\angle MNP=120^\circ$，由余弦定理可得 $|MP|^2=|MN|^2+|NP|^2-2|MN|\cdot|NP|\cos 120^\circ$，即 $|MN|^2+|NP|^2+|MN|\cdot|NP|=100$，由均值不等式得 $3|MN|\cdot|NP|\leqslant100$，∴ $S_{\triangle MNP}=\frac{1}{2}|MN|\cdot|NP|\sin 120^\circ\leqslant\frac{25\sqrt{3}}{3}$. ∴ $\triangle MNP$ 面积最大值为 $\frac{25\sqrt{3}}{3}$ ……………………………………… 10 分

18.【解析】(1)延长 DM 交 D_1A_1 的延长线于 E，连接 NE，则 NE 即为直线 l 的位置.

∵ $E\in DM\cap D_1A_1$，∴ $E\in DM\subset$ 平面 DMN，$E\in D_1A_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，

∴ $E\in$ 平面 $DMN\cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，∴ $EN\subset$ 平面 $DMN\cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，则 NE 即为直线 l 的位置.（也可根据线面平行性质确定直线位置）…………… 6 分

(2)设直线 l 与 A_1B_1 交于点 P，则 P 为 A_1B_1 四等分点，正方体被平面 DMN 截成两部分，较小部分为三棱台 $A_1PM\text{-}D_1ND$，



$V=\frac{1}{3}\left(S_{\Delta A_1PM}+S_{\Delta D_1ND}+\sqrt{S_{\Delta A_1PM}\cdot S_{\Delta D_1ND}}\right)\cdot A_1D_1=\frac{1}{3}a\cdot\left(\frac{1}{16}a^2+\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{8}a^2\right)=\frac{7}{48}a^3$. ……………… 12 分

19.【解析】(1) $2\ 000\times(1+0.1)^6+2\ 000\times(1+0.1)^5+\cdots+2\ 000\times(1+0.1)$

$=2\ 000\times\frac{1.1\times(1.1^6-1)}{0.1}=20\ 000\times(1.1^7-1.1)\approx17\ 000$，

∴在十八岁生日当天时，一次性取出的金额总数为 17 000 元. ……………………………… 4 分

(2)设到商场勤工俭学的天数为 $n(n\in\mathbf{N}^*)$，

则第一种方案领取的报酬为 $A_n=38n$；

第二种方案每天报酬与天数成首项为 4，公差为 4 的等差数列，利用等差数列的前 n 项和公式可得：领取的报酬为 $B_n=4n+\frac{n(n-1)}{2}\times4=2n^2+2n$；

第三种方案每天报酬与天数成首项为 0.4，公比为 2 的等比数列，利用等比数列的前 n 项和公式可得：领取的报酬为 $C_n=\frac{0.4(1-2^n)}{1-2}=\frac{2}{5}(2^n-1)$.

$B_n-A_n=2n^2-36n=2n(n-18)$，

当 $n>18$ 时，$B_n>A_n$；当 $n=18$ 时，$B_n=A_n$；当 $n<18$ 时，$B_n<A_n$.

令 $x_n=C_n-A_n=\frac{2}{5}(2^n-1)-38n$，

则 $x_{n+1}-x_n=\left[\frac{2}{5}(2^{n+1}-1)-38(n+1)\right]-\left[\frac{2}{5}(2^n-1)-38n\right]=\frac{2^{n+1}}{5}-38=\frac{2}{5}(2^n-95)$，

当 $n\leqslant6$ 时，$x_{n+1}<x_n$，此时数列 $\{x_n\}$ 单调递减，则 $x_1>x_2>\cdots>x_7$；

当 $n\geqslant7$ 时，$x_{n+1}>x_n$，此时数列 $\{x_n\}$ 单调递增，即 $x_7<x_8<\cdots$.

∵ $x_1<0$，则 $x_7<x_6<\cdots<x_1<0$，

又∵ $x_9<0$，$x_{10}>0$，故当 $n\geqslant10$ 时，$x_n>0$，即 $C_n>A_n$，

当 $n\leqslant9$ 时，$x_n<0$，即 $C_n<A_n$.

令 $y_n=C_n-B_n=\frac{2}{5}(2^n-1)-2n(n+1)$，其中 $n\geqslant10$，

则 $y_{n+1}-y_n=\left[\frac{2}{5}(2^{n+1}-1)-2(n+1)(n+2)\right]-\left[\frac{2}{5}(2^n-1)-2n(n+1)\right]=\frac{2^{n+1}}{5}-4(n+1)$，

令 $t_n=\frac{2^{n+1}}{5}-4(n+1)$，则 $t_{n+1}-t_n=\left[\frac{2^{n+2}}{5}-4(n+2)\right]-\left[\frac{2^{n+1}}{5}-4(n+1)\right]=\frac{2^{n+1}}{5}-4$，

当 $n\geqslant10$ 时，$t_{n+1}>t_n$，此时数列 $\{t_n\}$ 单调递增，则 $t_n\geqslant t_{10}>0$，则 $y_{n+1}>y_n$，

∴当 $n\geqslant10$ 时，数列 $\{y_n\}$ 单调递增，则 $y_n\geqslant y_{10}>0$，即 $C_n>B_n$，

综上所述，当 $n\leqslant 9$ 时，$\max\{A_n,B_n,C_n\}=A_n$，应选第一种方案；

当 $n\geqslant 10$ 时，$\max\{A_n,B_n,C_n\}=C_n$，应选第三种方案. ………………………………… 12 分

20.【解析】(1)设第一次抽取的人记为 x_1，第二次抽取的人记为 x_2，则可用数组 (x_1,x_2) 表示样本点. 设事件 $A=$“抽到两名男生”，

有放回简单随机抽样的样本空间 $\Omega_1=\{(B_1,B_1),(B_1,B_2),(B_1,G_1),(B_1,G_2),(B_2,B_1),(B_2,B_2),(B_2,G_1),(B_2,G_2),(G_1,B_1),(G_1,B_2),(G_1,G_1),(G_1,G_2),(G_2,B_1),(G_2,B_2),(G_2,G_1),(G_2,G_2)\}$，

$P(A)=\frac{4}{16}=0.25$； ………………………… 2 分

不放回简单随机抽样的样本空间 $\Omega_2=\{(B_1,B_2),(B_1,G_1),(B_1,G_2),(B_2,B_1),(B_2,G_1),(B_2,G_2),(G_1,B_1),(G_1,B_2),(G_1,G_2),(G_2,B_1),(G_2,B_2),(G_2,G_1)\}$，

$P(A)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}\approx 0.167$； ………………… 4 分

按性别等比例分层抽样，先从男生中抽一人，再从女生中抽一人，其样本空间 $\Omega_3=\{(B_1,G_1),(B_1,G_2),(B_2,G_1),(B_2,G_2)\}$，

$\because$按性别等比例分层抽样，不可能抽到两名男生，$\therefore A=\varnothing$，因此 $P(A)=0$. ……………… 5 分

计算表明，在总体的男、女生人数相同的情况下，用有放回简单随机抽样进行抽样，出现全是男生的样本的概率为 0.25；用不放回简单随机抽样进行抽样，出现全是男生的样本的概率约为 0.167，可以有效地降低出现“极端”样本的概率. 特别是，在按性别等比例分层抽样中，全是男生的样本出现的概率为 0，真正避免了这类极端样本的出现. 所以改进抽样方法对于提高样本的代表性很重要. ……………………… 6 分

(2)对于有放回摸球，每次摸到黄球的概率为 $\frac{40}{100}=0.4$，且各次试验是独立的，因此 $X\sim B(20,0.4)$，

X 的分布列为 $P(X=k)=C_{20}^{k}\times 0.4^{k}\times 0.6^{20-k}$，$k=0,1,2,\cdots,20$，

X 的数学期望为 $E(X)=20\times 0.4=8$； … 8 分

对于不放回摸球，各次试验不独立，X 服从超几何分布，

X 的分布列为 $P(X=k)=\frac{C_{40}^{k}C_{60}^{20-k}}{C_{100}^{20}}$，$k=0,1,2,\cdots,20$，

X 的数学期望为 $E(X)=\frac{20\times 40}{100}=8$. … 10 分

说明：二项分布和超几何分布都可以描述随机抽取的 n 件产品中次品数的分布规律，并且二者的均值相同. 对于不放回抽样，当 n 远远小于 N 时，每抽取一次后，对 N 的影响小，此时，超几何分布可以用二项分布近似. ………… 12 分

21.【解析】(1)由题意得：设 $P(x_0,y_0)$，$|AP||BP|=\frac{|x_0-\sqrt{3}y_0|}{2}\cdot\frac{|x_0+\sqrt{3}y_0|}{2}=\frac{3}{4}$，

$\therefore|x_0^2-3y_0^2|=3$，又$\because$垂足 A 位于第一象限，垂足 B 位于第四象限，$\angle APB>90°$，

$\therefore C$ 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1(x>0)$. … 4 分

(2)由对称性，不妨设 P 在第一象限，设 $P(x_0,y_0)$，则 $T(-x_0,-y_0)$，

设直线 l 的斜率为 k，记 $\alpha=(1,k)$，由 l 为 $\angle MTN$ 的角平分线，

则 $\frac{\overrightarrow{TM}\cdot\alpha}{|\overrightarrow{TM}|}=\frac{\overrightarrow{TN}\cdot\alpha}{|\overrightarrow{TN}|}$，其中 $\frac{x_0{}^2}{3}-y_0{}^2=1$，$x_0\geqslant\sqrt{3}$，

$\overrightarrow{TM}=(x_0-2,y_0)$，$\overrightarrow{TN}=(x_0+2,y_0)$，

$\therefore|\overrightarrow{TM}|=\sqrt{(-2+x_0)^2+y_0{}^2}$

$=\sqrt{(-2+x_0)^2+\frac{x_0{}^2}{3}-1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}x_0-\sqrt{3}$，

同理得：$|\overrightarrow{TN}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}x_0+\sqrt{3}$，

代入 $\frac{\overrightarrow{TM}\cdot\boldsymbol{a}}{|\overrightarrow{TM}|}=\frac{\overrightarrow{TN}\cdot\boldsymbol{a}}{|\overrightarrow{TN}|}$ 中，

$\frac{(x_0-2,y_0)\cdot(1,k)}{\frac{2\sqrt{3}}{3}x_0-\sqrt{3}}=\frac{(x_0+2,y_0)\cdot(1,k)}{\frac{2\sqrt{3}}{3}x_0+\sqrt{3}}$，

化简得：$x_0=3ky_0$，

将 $x_0=3ky_0$ 代入 $\frac{x_0{}^2}{3}-y_0{}^2=1$，$x_0\geqslant\sqrt{3}$ 中，

解得：$x_0=\frac{3k}{\sqrt{3k^2-1}}$，$y_0=\frac{1}{\sqrt{3k^2-1}}$，

$\therefore P\left(\frac{3k}{\sqrt{3k^2-1}},\frac{1}{\sqrt{3k^2-1}}\right)$，

$T\left(-\frac{3k}{\sqrt{3k^2-1}},-\frac{1}{\sqrt{3k^2-1}}\right)$，

设直线 l 的方程为 $y=kx+n$，

将 $T\left(-\frac{3k}{\sqrt{3k^2-1}},-\frac{1}{\sqrt{3k^2-1}}\right)$ 代入，解得：$n=\sqrt{3k^2-1}$，

$\therefore$直线 l 的方程为 $y=kx+\sqrt{3k^2-1}$，$k>\frac{\sqrt{3}}{3}$，

由点到直线距离公式得：$|PH|=\frac{\left|\frac{3k^2-1}{\sqrt{3k^2-1}}+\sqrt{3k^2-1}\right|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{2\sqrt{3k^2-1}}{\sqrt{k^2+1}}$，

由直线 PQ 的斜率为 $-\frac{1}{k}$，设直线 PQ 的方程为 $x=-ky+m$，

将 $P\left(\frac{3k}{\sqrt{3k^2-1}},\frac{1}{\sqrt{3k^2-1}}\right)$ 点代入，解得：$m=\frac{4k}{\sqrt{3k^2-1}}$，

$\therefore$直线 PQ 的方程为 $x=-ky+\frac{4k}{\sqrt{3k^2-1}}$，将其与 $\frac{x^2}{3}-y^2=1(x>0)$ 联立得：

$(k^2-3)y^2-\frac{8k^2}{\sqrt{3k^2-1}}y+\frac{7k^2+3}{3k^2-1}=0$，

设 $Q(x_1,y_1)$，则 $y_0+y_1=\frac{8k^2}{(k^2-3)\sqrt{3k^2-1}}$，

$y_0y_1=\frac{7k^2+3}{(k^2-3)(3k^2-1)}$，

由 $y_0y_1<0$ 可知 $k\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)$,

$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\ |y_0-y_1|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(y_0+y_1)^2-4y_0y_1}=\frac{6(k^2+1)^{\frac{3}{2}}}{(3-k^2)\sqrt{3k^2-1}}$,

由均值不等式,$\frac{|PQ|}{|PH|}=\frac{3(k^2+1)^2}{(3-k^2)(3k^2-1)}\geqslant\frac{3(k^2+1)^2}{(k^2+1)^2}=3$,当且仅当 $3-k^2=3k^2-1$,

即 $k^2=1$ 时,等号成立,∵$k\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)$,故 $k=1$,∴$\frac{|PH|}{|QH|}=\frac{1}{\frac{|PQ|}{|PH|}+1}\leqslant\frac{1}{4}$,当且仅当 $k=1$ 时,等号成立,$\frac{|PH|}{|QH|}$的最大值为$\frac{1}{4}$. …… 12 分

22.【解析】(1) $f'(x)=\frac{1}{x}$,不妨设 $x_1<x_2$,

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}>\frac{2}{x_1+x_2}$,即 $\ln x_2-\ln x_1>\frac{2(x_2-x_1)}{x_2+x_1}$,得 $\ln\frac{x_2}{x_1}>\frac{2\left(\frac{x_2}{x_1}-1\right)}{\frac{x_2}{x_1}+1}$,令 $\frac{x_2}{x_1}=t$,则 $t>1$,即证:$\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$,令 $g(t)=\frac{2(t-1)}{t+1}-\ln t$,$g'(t)=\frac{4}{(t+1)^2}-\frac{1}{t}=\frac{-(t-1)^2}{t(t+1)^2}<0$,

∴$g(t)$在$(1,+\infty)$上是减函数,∴$g(t)<g(1)=0$,∴$\ln t>\frac{t-1}{t+1}$得证,

∴$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$成立. …… 5 分

(2)方法一:当 $x\geqslant1$ 时,$\frac{x\sin x}{2}\leqslant\frac{x}{2}$,$e^x-e^{\frac{x\sin x}{2}}>e^x-e^{\frac{x}{2}}$,

令 $F(x)=e^x-e^{\frac{x}{2}}-x$,则 $F'(x)=e^x-\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}-1=e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}\right)-1>e^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}-1>e^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}>0$,

∴$F(x)=e^x-e^{\frac{x}{2}}-x$ 在$[1,+\infty)$单调递增,

∴$F(x)\geqslant F(1)>0$,

当 $0<x<1$ 时,$e^x-e^{\frac{x\sin x}{2}}>e^x-e^{\frac{x^2}{2}}$,

设 $m(x)=2\ln x-x+\frac{1}{x}(x>1)$,则 $m'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+2x-1}{x^2}=\frac{-(x-1)^2}{x^2}<0$,

在$(1,+\infty)$单调递减,∴$m(x)<m(1)=0$,即 $2\ln x<x-\frac{1}{x}(x>1)$,

令 $x=\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$,∴$2\ln\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}=\ln\frac{x_2}{x_1}=\ln x_2-\ln x_1<\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}-\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2x_1}}$,

即 $x_2-x_1>\sqrt{x_1\cdot x_2}(\ln x_2-\ln x_1)$,

∴ $e^x-e^{\frac{x^2}{2}}>\sqrt{e^x\cdot e^{\frac{x^2}{2}}}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)=\left(x-\frac{x^2}{2}\right)e^{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}}$,若能证$\left(x-\frac{x^2}{2}\right)e^{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}}>x$,即可证 $e^x-\frac{x\sin x}{e^2}>x$,

即证:$\left(1-\frac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}}>1$,令 $h(x)=\left(1-\frac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}}$,$h'(x)=\left(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{4}\right)e^{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}}=\frac{x}{4}(1-x)e^{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}}>0$,

∴$h(x)$在$(0,1)$单调递增∴$h(x)>h(0)=1$,得证.

∴当 $x>0$ 时,$e^x-e^{\frac{x\sin x}{2}}>x$. …………… 12 分

方法二:证明:令 $h(x)=e^x-3x-1$,$h'(x)=e^x-3$,

当 $x<\ln 3$ 时,$h(x)<0$,当 $x>\ln 3$ 时,$h(x)>0$,

从而 $h(x)$在$(-\infty,\ln 3)$单调递减,$(\ln 3,+\infty)$上单调递增,

当 $0<x<\ln 3$ 时,$h(x)<h(0)=0$,即 $e^x<3x+1$,$(x\neq0)$,

$-e^x+e\ \frac{x\sin x}{2}=e^x\left(-1+e\left(\frac{\sin x}{2}-1x\right)\right)\leqslant e^x\left[-1+1+3\left(\frac{\sin x}{2}-1\right)x\right]=xe^x\left(-3+\frac{3}{2}\sin x\right)$

(这里用到 $e\left(\frac{\sin x}{2}-1\right)x<1+3\left(\frac{\sin x}{2}-1\right)x$,$x\neq0$),

令 $g(x)=e^x\left(-3+\frac{3}{2}\sin x\right)$,$g'(x)=e^x\left(-3+\frac{3}{2}\sin x+\frac{3}{2}\cos x\right)=e^x\left(-3+\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)<0$,

从而 $g(x)<g(0)=-3$,$x>0$,从而$-e^x+e^{\frac{x\sin x}{2}}<-3x<-x$,即 $e^x-e^{\frac{x\sin x}{2}}>x$.

当 $x\geqslant\ln 3$ 时,要证 $e^x-e^{\frac{x\sin x}{2}}>x$ 即证 $e^x-e^{\frac{x}{2}}>x$,

令 $t=e^{\frac{x}{2}}\geqslant\sqrt{3}$,则只需证 $t^2-t>2\ln t$,

令 $p(t)=t^2-t-2\ln t$,则 $p'(t)=2t-1-\frac{2}{t}=\frac{2t^2-t-2}{t}=\frac{2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{17}{8}}{t}$,

当 $t=\sqrt{3}$时,$p'(\sqrt{3})=2\sqrt{3}-\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}>0$,

∴$t>\sqrt{3}$时,$p'(t)>0$,$p(t)_{\min}=h(\sqrt{3})=3-\sqrt{3}-\ln 3>0$,∴$e^x-e^{\frac{x}{2}}>x$.

综上所述:当 $x>0$ 时,$e^x-e^{\frac{x\sin x}{2}}>x$. …… 12 分

多维细目表

题型	题号	考查知识板块	考查知识方法	分值	难易度		
					简单	中等	较难
选择题	1	复数	复数运算	5	√		
	2	集合	集合交并补运算	5	√		
	3	简易逻辑和向量	充要条件,向量夹角	5	√		
	4	数列	前 n 项和及最值	5	√		
	5	三角函数	三角函数性质,解三角形	5	√		
	6	简易逻辑和数列	推理及数列通项	5		√	
	7	函数与方程	函数基本性质综合	5		√	
	8	解析几何	椭圆中的斜率计算,离心率	5		√	
	9	统计	抽样,平均数,方差的运算	5	√		
	10	立体几何	垂直的判断,面积,距离,内切球半径	5		√	
	11	概率统计	概率,分布列	5		√	
	12	函数与导数	函数性质及其应用	5			√
填空题	13	二项式定理	展开式项的系数	5	√		
	14	条件概率	全概率、条件概率	5		√	
	15	立体几何	动点轨迹,求值	5		√	
	16	函数	函数的几何意义,全称、特称命题,不等式求解	5			√
解答题	17	三角函数	三角函数解析式、三角形面积最值	10	√		
	18	立体几何	平面交线问题,截面求体积	12		√	
	19	数列	存款问题,方案选择问题	12		√	
	20	统计概率	抽样方法比较,摸球方式对比	12		√	
	21	圆锥曲线	双曲线,最值问题	12			√
	22	函数与导数	不等式证明	12			√