绝密★启用前

天一大联考
“顶尖计划”2020届高中毕业班第二次考试
文科数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

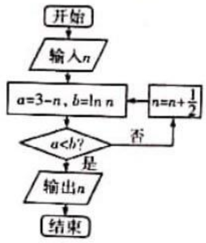
1. 已知集合 $A=\{x|x^2<4\}$，$B=\left\{x\left|\frac{x-3}{x-1}\leqslant 0\right.\right\}$，则 $(\complement_{\mathbf{R}}B)\cap A=$

A. $(-2,1]$　　B. $(-2,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $[1,2)$

2. 设 i 为虚数单位，z 为复数，若 $\frac{|z|}{z}+\mathrm{i}$ 为实数 m，则 $m=$

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

3. 执行如图所示的程序框图，若输入 $n=\frac{1}{2}$，则输出的 n 的值为



A. $\frac{3}{2}$　　B. 2　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 3

4. 一个陶瓷圆盘的半径为10 cm，中间有一个边长为4 cm的正方形花纹，向盘中投入1 000粒米后，发现落在正方形花纹上的米共有51粒，据此估计圆周率 π 的值为（精确到0.001）

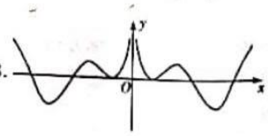
A. 3.132　　B. 3.137　　C. 3.142　　D. 3.147

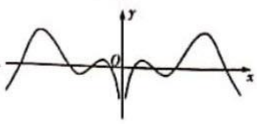
5. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}y\leqslant\sqrt{1-x^2},\\x+y\geqslant -1,\end{cases}$ 则 $x-y$ 的取值范围为

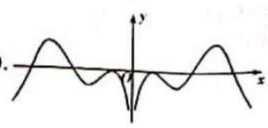
A. $[-1,3]$　　B. $[-\sqrt{2},1]$　　C. $[-3,\sqrt{2}]$　　D. $[-\sqrt{2},3]$

6. 函数 $y=\ln|x|\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ 的部分图象为

A. 

B. 

C. 

D. 

7. 已知三棱锥 $D-ABC$ 的外接球半径为2,且球心为线段 BC 的中点,则三棱锥 $D-ABC$ 的体积的最大值为

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{8}{3}$　　D. $\frac{16}{3}$

8. 已知 AM,BN 分别为圆 $O_1:(x+1)^2+y^2=1$ 与 $O_2:(x-2)^2+y^2=4$ 的直径,则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}$ 的取值范围为

A. $[0,8]$　　B. $[0,9]$　　C. $[1,8]$　　D. $[1,9]$

9. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作直线与抛物线在第一象限交于点 A,与准线在第三象限交于点 B,过点 A 作准线的垂线,垂足为 H. 若 $\tan\angle AFH=2$,则 $\frac{|AF|}{|BF|}=$

A. $\frac{5}{4}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

10. 数列 $\{a_n\}$ 满足递推公式 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$,且 $a_1=a_2$, $a_{2\,019}\cdot a_{2\,020}=2\,020$,则 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2\,019}^2=$

A. 1 010　　B. 2 020　　C. 3 030　　D. 4 040

11. 设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内部有两个球 O_1 和 O_2,已知球 O_1 与正方体的三个面相切,球 O_2 与正方体的六个面均相切,且球 O_1 与球 O_2 也相切. 设球 O_1,O_2 的半径分别为 r_1,r_2,则 $\frac{r_1}{r_2}=$

A. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$　　B. $2-\sqrt{3}$　　C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　D. $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. 方程 $x^2+ex\ln|x|-2(e\ln|x|)^2=0$ 的实根个数为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 已知 $f(x)=e^x+e^{ax}$ 是偶函数,则 $f(x)$ 的最小值为________.

14. 公比不为1的等比数列 $\{a_n\}$ 中,对任意 $k\in\mathbf{N}^*$, a_k 既是 a_{k+1} 与 a_{k+2} 的等差中项,又是1与 a_{2k} 的等比中项,则 $a_3=$________.

15. 在直角坐标系中,某等腰直角三角形的两个顶点坐标分别为 $(1,1),(2,2)$,函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(A>0,0<\omega<\frac{\pi}{2},|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象经过该三角形的三个顶点,则 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=$________.

16. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,过 F_1 作直线 l 与双曲线有唯一交点 P,若 $\sin\angle F_1PF_2=\frac{4}{5}$,则该双曲线的离心率为________.

三、解答题:共70分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤. 第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答. 第22,23题为选考题,考生根据要求作答.

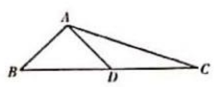
(一)必考题:共60分.

17.(12分)

如图,在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且满足 $a\sin B+b\cos A=c$,线段 BC 的中点为 D.

(Ⅰ)求角 B 的大小;

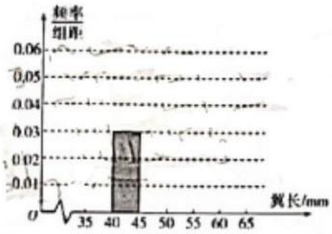
(Ⅱ)已知 $\sin C=\frac{\sqrt{10}}{10}$,求 $\angle ADB$ 的大小.



18. (12 分)

某生物研究小组准备探究某种蜻蜓的翼长分布规律，随机捕捉 20 只该种蜻蜓，测量它们的翼长（翼长为整数，单位：mm）并绘制成如下的茎叶图和一部分频率分布直方图，其中茎叶图中有一处数字看不清（用 a 表示），但已知茎叶图中每一行的数据都按照从小到大的顺序排列且无相同数据. 频率分布直方图每个分组含左端点不含右端点.

茎	叶
3	6 7 9
4	1 2 3 a 6 8 9
5	0 1 2 3 4 5 6 8
6	1 2



（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）根据茎叶图将频率分布直方图补充完整；

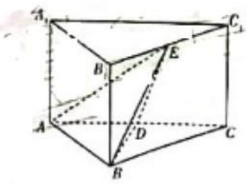
（Ⅲ）分别根据茎叶图和频率分布直方图计算蜻蜓翼长的中位数，并分析哪个中位数可以更准确地反映蜻蜓翼长的总体情况.

19. (12 分)

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=BC=AA_1=1$，$AC=\sqrt{3}$，点 D，E 分别为 AC 和 B_1C_1 的中点.

（Ⅰ）棱 AA_1 上是否存在点 P 使得平面 $PBD\perp$ 平面 ABE？若存在，写出 PA 的长并证明你的结论；若不存在，请说明理由.

（Ⅱ）求点 A 到平面 BDE 的距离.



20. (12 分)

已知圆 $O_1:(x+1)^2+y^2=8$ 上有一动点 Q，点 O_2 的坐标为 $(1,0)$，四边形 QO_1O_2R 为平行四边形，线段 O_1R 的垂直平分线交 O_2R 于点 P.

(Ⅰ)求点 P 的轨迹 C 的方程；

(Ⅱ)过点 O_2 作直线与曲线 C 交于 A,B 两点，点 K 的坐标为 $(2,1)$，直线 KA,KB 与 y 轴分别交于 M,N 两点，求证：线段 MN 的中点为定点，并求出 $\triangle KMN$ 面积的最大值.

21. (12 分)

已知曲线 $f(x)=\ln x+ax+b$ 在 $x=1$ 处的切线经过原点.

(Ⅰ)求实数 b 的值；

(Ⅱ)若 $a\geqslant -2$，讨论 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$ 的极值点的个数.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22,23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22. [选修 4－4：坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中，直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\varphi,\\ y=t\sin\varphi\end{cases}$（$t$ 为参数）；直线 l_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right),\\ y=t\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)\end{cases}$（$t$ 为参数）. 以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\theta=\cos\theta$.

(Ⅰ)求 l_1,l_2 的极坐标方程和 C 的直角坐标方程；

(Ⅱ)设 l_1,l_2 分别交 C 于 A,B 两点(与原点 O 不重合)，求 $|OA|\cdot|OB|$ 的最小值.

23. [选修 4－5：不等式选讲](10 分)

已知 $f(x)=|x-a|+|x+b|\,(a>0,b>0)$.

(Ⅰ)当 $a=b=1$ 时，解不等式 $f(x)\leqslant 8-x^2$；

(Ⅱ)若 $f(x)$ 的最小值为 1，求 $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{2b}$ 的最小值.

天一大联考
“顶尖计划”2020 届高中毕业班第二次考试
文科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1.【答案】 A

【命题意图】 本题考查解二次不等式、分式不等式、集合的运算.

【解析】 由题意知 $A=(-2,2)$,$B=(1,3]$,$\complement_{\mathbf{R}}B=(-\infty,1]\cup(3,+\infty)$,则$(\complement_{\mathbf{R}}B)\cap A=(-2,1]$.

2.【答案】 B

【命题意图】 本题考查复数的运算.

【解析】 设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,则$\frac{|z|}{z}+i=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+bi}+i=\frac{\sqrt{a^2+b^2}(a-bi)}{a^2+b^2}+i=\frac{a+(\sqrt{a^2+b^2}-b)i}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 由题意有

$\sqrt{a^2+b^2}-b=0\Rightarrow a=0$,所以 $m=0$.

3.【答案】 C

【命题意图】 本题考查程序框图.

【解析】 程序的运行过程为

n	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
a	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
b	$\ln\frac{1}{2}$	0	$\ln\frac{3}{2}$	$\ln 2$	$\ln\frac{5}{2}$

$n=2$ 时,$1>\ln 2$;$n=\frac{5}{2}$时,$\frac{1}{2}<\ln\frac{5}{2}$,此时输出 $n=\frac{5}{2}$.

4.【答案】 B

【命题意图】 本题考查几何概型.

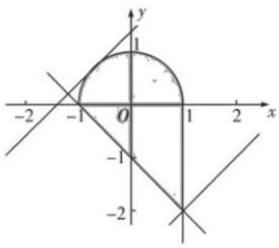
【解析】 $\frac{4^2}{\pi\cdot 10^2}\approx\frac{51}{1\ 000}\Rightarrow\pi\approx 3.137$.

5.【答案】 D

【命题意图】 本题考查线性规划.

【解析】 根据题意画出可行域如图,令 $z=x-y$,则直线 $y=x-z$ 经过点$(1,-2)$时,$z_{\max}=1-(-2)=3$;

直线 $y=x-z$ 与半圆 $y=\sqrt{1-x^2}$相切时,切点为$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,此时 $z_{\min}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$.



6.【答案】 D

【命题意图】 本题考查函数的图象问题.

【解析】 $y_1=\ln|x|$ 和 $y_2=\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ 均为偶函数,所以 $y=\ln|x|\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ 也为偶函数,由奇偶性可以排除A选项. 下面考虑 $x>0$ 这一侧的图象:当 $0<x<1$ 时,$y_1<0,y_2>0,y<0$;当 $x=1$ 时,$y=0$;当 $1<x<2$ 时,$y_1>0$,$y_2<0,y<0$. 因此 y 在第一个零点 $x=1$ 附近都为负,答案选D.

7.【答案】 C

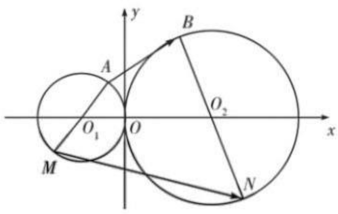
【命题意图】 本题考查空间几何体的结构特征.

【解析】 由已知可得,$\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 都是直角三角形,则当它们都是等腰直角三角形且平面 $ABC\perp$ 平面 BCD 时,三棱锥 $D-ABC$ 的体积最大,最大值为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times2\times2=\frac{8}{3}$.

8.【答案】 A

【命题意图】 本题考查向量的分解、向量的数量积.

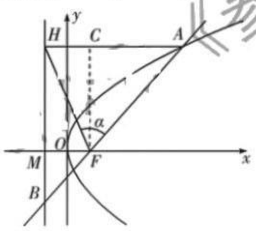
【解析】 如图,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2B})\cdot(\overrightarrow{MO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2N})=[\overrightarrow{O_1O_2}+(\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B})]\cdot[\overrightarrow{O_1O_2}-(\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B})]=|\overrightarrow{O_1O_2}|^2-|\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}|^2=9-|\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}|^2$,其中 $|\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}|\in[2-1,2+1]=[1,3]$,所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}\in[9-3^2,9-1^2]=[0,8]$.



9.【答案】 C

【命题意图】 本题考查抛物线的定义.

【解析】 如图,设准线与 x 轴的交点为 M,过点 F 作 $FC\perp AH$. 由抛物线定义知 $|AF|=|AH|$,所以 $\angle AHF=\angle AFH=\alpha$,$\angle FAH=\pi-2\alpha=\angle OFB$,$|BF|=\frac{|MF|}{\cos(\pi-2\alpha)}=\frac{p}{\cos(\pi-2\alpha)}$,$|AF|=\frac{|CF|}{\sin(\pi-2\alpha)}=\frac{|CH|\tan\alpha}{\sin(\pi-2\alpha)}=\frac{p\tan\alpha}{\sin(\pi-2\alpha)}$,所以 $\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{\tan\alpha}{\tan(\pi-2\alpha)}=\frac{\tan\alpha}{-\tan2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha-1}{2}=\frac{3}{2}$.



10.【答案】 B

【命题意图】 本题考查累加法求数列的前 n 项和.

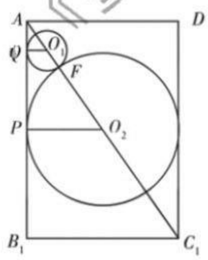
【解析】 $a_{n+1}=a_{n+2}-a_n$ 左右两端同乘以 a_{n+1} 有 $a_{n+1}^2=a_{n+1}a_{n+2}-a_na_{n+1}$,从而 $a_n^2=a_na_{n+1}-a_{n-1}a_n$,$a_{n-1}^2=a_{n-1}a_n-a_{n-2}a_{n-1}$,$\cdots$,$a_2^2=a_2a_3-a_1a_2$,将以上式子累加得 $a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=a_na_{n+1}-a_1a_2$. 由 $a_1=a_2$ 得 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=a_na_{n+1}$. 令 $n=2\,019$,有 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2\,019}^2=a_{2\,019}\cdot a_{2\,020}=2\,020$.

— 2 —

11.【答案】 B

【命题意图】 本题考查内切球的问题.

【解析】 不妨设正方体的棱长为2,球 O_1 同时与以 A 为公共顶点的三个面相切. 由题可知,两个球心 O_1,O_2 和两球的切点均在体对角线 AC_1 上,两个球在平面 AB_1C_1D 处的截面如图所示. 则 $O_2F=r_2=1$,$AO_2=\frac{AC_1}{2}=\sqrt{3}$,所以 $AF=AO_2-O_2F=\sqrt{3}-1$. 又因为 $AF=AO_1+O_1F=\sqrt{3}r_1+r_1$,因此 $(\sqrt{3}+1)r_1=\sqrt{3}-1$,得 $r_1=2-\sqrt{3}$,所以 $\frac{r_1}{r_2}=2-\sqrt{3}$.



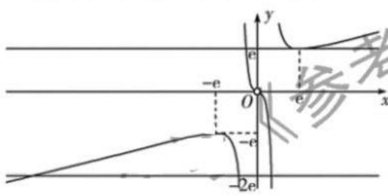
12.【答案】 D

【命题意图】 本题考查导数与函数的单调性和极值、复合函数零点的个数问题.

【解析】 注意到 $x=\pm1$ 不满足原方程,因此 $\ln|x|\neq0$,将原方程左右两端同除以 $\ln^2|x|$ 变为 $\left(\frac{x}{\ln|x|}\right)^2+e\frac{x}{\ln|x|}-2e^2=0$,得 $\frac{x}{\ln|x|}=e$ 或 $\frac{x}{\ln|x|}=-2e$. 令 $f(x)=\frac{x}{\ln|x|}$,当 $x>0$ 且 $x\neq1$ 时 $f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$,令 $f'(x)=0$ 得 $x=e$,可得 $f(x)$,$f'(x)$ 的变化情况如下表:

x	$x\to0$	$(0,1)$	$(1,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	/	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$f(x)\to0$	↘	↘	e	↗

作出 $y=f(x)$、$y=-2e$ 和 $y=e$ 的图象,由图可知,原方程有5个实根.



二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13.【答案】 2

【命题意图】 本题考查函数的奇偶性、基本不等式.

【解析】 令 $f(1)=f(-1)$ 得 $a=-1$,所以 $f(x)=e^x+e^{-x}\geq2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=2$,当且仅当 $x=0$ 时取等号.

14.【答案】 -8

【命题意图】 本题考查等比数列的通项公式、等差中项、等比中项的概念.

【解析】 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q. 由 $a_{k+1}+a_{k+2}=2a_k$ 两边同除以 a_k,可得 $q+q^2=2$,解得 $q=1$(舍)或 $q=-2$. 由 $a_k^2=a_{2k}$,得 $(a_1q^{k-1})^2=a_1q^{2k-1}$,解得 $a_1=q=-2$,所以 $a_3=a_1q^2=-8$.

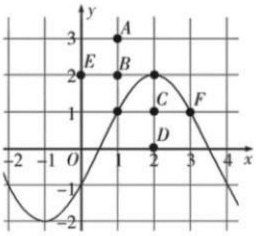
15.【答案】 $2\sin\left(\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$

【命题意图】 本题考查三角函数的图象与性质.

【解析】 等腰直角三角形的第三个顶点可能的位置如下图中的点 A,B,C,D,E,F,其中点 A,B,C,D 与已有的两个顶点横坐标重复,舍去;若为点 E,则点 E 与点(2,2)的中间位置的点的纵坐标必然大于 2 或小于 −2,不可能为(1,1),因此点 E 也舍去,只有点 F 满足题意. 此时点(2,2)为最大值点,所以 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$,又 $0<\omega<\frac{\pi}{2}$,则 $\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2\omega}>1$,所以点(1,1),(2,2)之间的图象单调,将(1,1),(2,2)代入 $f(x)$ 的表达式有

$$\begin{cases}\sin(\omega+\varphi)=\frac{1}{2},\\ \sin(2\omega+\varphi)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega+\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\\ 2\omega+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega=\frac{\pi}{3},\\ \varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z},\end{cases}$$

由 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ 知 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$,因此 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$



16.【答案】 $\sqrt{2}$或$\sqrt{17}$

【命题意图】 本题考查利用双曲线的定义和正余弦定理求离心率.

【解析】 由唯一交点知直线 l 与渐近线平行,不妨设 l 的斜率为 $\frac{b}{a}$,所以 $\tan\angle PF_1F_2=\frac{b}{a}$,$\sin\angle PF_1F_2=\frac{b}{c}$,$\cos\angle PF_1F_2=\frac{a}{c}$. 在 $\triangle PF_1F_2$ 中,由正弦定理有 $\frac{|F_1F_2|}{\sin\angle F_1PF_2}=\frac{|PF_2|}{\sin\angle PF_1F_2}$,得 $|PF_2|=\frac{5}{2}b$,则 $|PF_1|=\frac{5}{2}b-2a$,由余弦定理有 $\cos\angle PF_1F_2=\frac{|PF_1|^2+|F_1F_2|^2-|PF_2|^2}{2|PF_1|\cdot|F_1F_2|}$,化简得 $(4a-b)(a-b)=0$,解得 $b=a$ 或 $b=4a$,因此 $e=\sqrt{2}$或$\sqrt{17}$.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17.【命题意图】 本题考查正弦定理和余弦定理的综合运用.

【解析】 (Ⅰ)由正弦定理得 $\sin A\sin B+\sin B\cos A=\sin C$. ························ (2 分)

而 $\sin C=\sin(\pi-A-B)=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$. ························ (3 分)

由以上两式得 $\sin A\sin B=\sin A\cos B$,即 $\sin A(\sin B-\cos B)=0$.

由于 $\sin A>0$,所以 $\sin B=\cos B$, ························ (5 分)

又由于 $B\in(0,\pi)$,得 $B=\frac{\pi}{4}$. ························ (6 分)

(Ⅱ)设 $c=1$,在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理有 $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow b=\sqrt{5}$. ························ (8 分)

由余弦定理有 $a^2+c^2-2ac\cos B=b^2$,整理得 $(a-2\sqrt{2})(a+\sqrt{2})=0$,

由于 $a>0$,所以 $a=2\sqrt{2}$,$BD=\frac{a}{2}=\sqrt{2}$. ························ (10 分)

在$\triangle ABD$中，由余弦定理有$AD=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}}=1$. ……………………………… (11分)

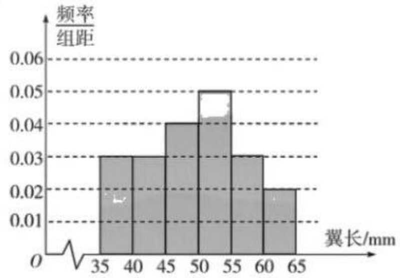
所以$AB^2+AD^2=BD^2$，所以$\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，$\angle ADB=\frac{\pi}{4}$. ……………………………… (12分)

18.【命题意图】 本题考查茎叶图、频率分布直方图.

【解析】 (Ⅰ)$[40,45)$区间对应的个体个数为$0.03\times5\times20=3$，对应的三个数据分别为41，42，43，因此a必须要大于4且小于6，从而$a=5$. ……………………………… (3分)

(Ⅱ)区间$[35,40)$，$[45,50)$，$[50,55)$，$[55,60)$，$[60,65)$对应的纵坐标分别为

$\frac{3}{20\times5}=0.03$，$\frac{4}{20\times5}=0.04$，$\frac{5}{20\times5}=0.05$，$\frac{3}{20\times5}=0.03$，$\frac{2}{20\times5}=0.02$. ……………………………… (5分)



……………………………………………………………… (8分)

(Ⅲ)根据茎叶图，中位数为$\frac{49+50}{2}=49.5$. ……………………………… (9分)

频率分布直方图中，区间$[35,50)$的频率为$(0.03+0.03+0.04)\times5=0.5$，因此中位数为50. ……… (10分)

利用茎叶图计算的中位数更加准确，因为频率分布直方图损失了样本的部分信息，数据的分组对数字特征的估计结果也有影响，而茎叶图是原始数据，记录了样本的全部信息，所以能更准确地反映蜻蜓翼长的总体情况. ……………………………… (12分)

19.【命题意图】 本题考查面面垂直的判定定理、等体积法求点到面的距离.

【解析】 (Ⅰ)存在点P满足题意，且$PA=\frac{3}{4}$. ……………………………… (1分)

证明如下：

取A_1C_1的中点为F，连接EF，AF，DF.

则$EF/\!/A_1B_1/\!/AB$，所以$AF\subset$平面ABE. ……………………………… (2分)

因为$AB=BC$，D是AC的中点，所以$BD\perp AC$.

在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，平面$ABC\perp$平面ACC_1，且交线为AC，

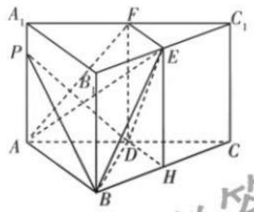
所以$BD\perp$平面ACC_1，所以$BD\perp AF$. ……………………………… (3分)

在平面ACC_1内，$\frac{AP}{AD}=\frac{AD}{DF}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\angle PAD=\angle ADF=90°$，

所以$Rt\triangle PAD\backsim Rt\triangle ADF$，从而可得$AF\perp PD$. ……………………………… (4分)

又因为$PD\cap BD=D$，所以$AF\perp$平面PBD. ……………………………… (5分)

因为$AF\subset$平面ABE，所以平面$PBD\perp$平面ABE. ……………………………… (6分)



(Ⅱ)过点 E 作 $EH\perp BC$,垂足为 H,连接 DH.

设点 A 到平面 BDE 的距离为 h.

$V_{E-ABD}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle ABD}\times 1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{24}$. ……………………………………(8 分)

而 $BE=\sqrt{BH^2+EH^2}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$,$DE=\sqrt{DH^2+EH^2}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

所以 $\triangle EDB$ 是等腰三角形,腰长为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$,底边长为 $\dfrac{1}{2}$,

所以 $S_{\triangle BDE}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{19}}{16}$. ……………………………………(10 分)

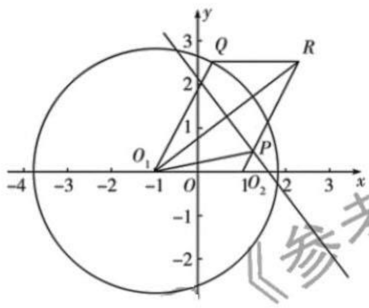
因此 $V_{A-BDE}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle BDE}\times h=\dfrac{\sqrt{19}}{48}h=\dfrac{\sqrt{3}}{24}$,解得 $h=\dfrac{2\sqrt{57}}{19}$. ……………………………(12 分)

20.【命题意图】 本题考查根据椭圆的定义求椭圆的方程,椭圆中的定点定值问题.

【解析】 (Ⅰ)$|PO_1|+|PO_2|=|PR|+|PO_2|=|RO_2|=|QO_1|=2\sqrt{2}$, ……………………………(2 分)

所以点 P 的轨迹是一个椭圆,且长轴长 $2a=2\sqrt{2}$,半焦距 $c=1$, ……………………………(3 分)

所以 $b^2=a^2-c^2=1$,轨迹 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1(y\neq 0)$. ……………………………(4 分)



(Ⅱ)当直线 AB 的斜率为 0 时,与曲线 C 无交点. ……………………………(5 分)

当直线 AB 的斜率不为 0 时,设过点 O_2 的直线方程为 $x=my+1$,点 A,B 坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$.

直线与椭圆方程联立得 $\begin{cases}x=my+1,\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 x,得 $(m^2+2)y^2+2my-1=0$.

则 $y_1+y_2=\dfrac{-2m}{m^2+2}$,$y_1y_2=\dfrac{-1}{m^2+2}$. ……………………………(7 分)

直线 KA 的方程为 $y-1=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}(x-2)$.

令 $x=0$ 得 $y_M=\dfrac{(m-2)y_1+1}{my_1-1}$. ……………………………(8 分)

同理可得 $y_N=\dfrac{(m-2)y_2+1}{my_2-1}$. ……………………………………………………………………(9 分)

所以 $\dfrac{y_M+y_N}{2}=\dfrac{[(m-2)y_1+1](my_2-1)+[(m-2)y_2+1](my_1-1)}{(my_1-1)(my_2-1)}$

$=\dfrac{m(m-2)y_1y_2+(y_1+y_2)-1}{m^2y_1y_2-m(y_1+y_2)+1}$

$=\dfrac{-m(m-2)-2m-(m^2+2)}{-m^2+2m^2+m^2+2}$

$=-1$,

所以 MN 的中点为 $(0,-1)$. ……………………………………………………………………(10 分)

不妨设 M 点在 N 点的上方,

则 $S_{\triangle KMN}=\dfrac{1}{2}|MN|\cdot 2=|MN|=2[y_M-(-1)]\leqslant 2\times(1+1)=4$. ……………………………(12 分)

21.【命题意图】 本题考查导数的计算、导数的几何意义以及利用导数研究函数性质.

【解析】 (Ⅰ)由题意知 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+a$,所以 $f'(1)=a+1$, ……………………………………………(1 分)

又因为 $f(1)=a+b$,所以切线方程为 $y-(a+b)=(a+1)(x-1)$. ……………………………………(3 分)

代入点 $(0,0)$,得 $b=1$. ………………………………………………………………………(4 分)

(Ⅱ)$g(x)=\dfrac{\ln x+ax+1}{e^x}$,$g'(x)=\dfrac{-\ln x-ax+\dfrac{1}{x}+a-1}{e^x}$.

令 $h(x)=-\ln x-ax+\dfrac{1}{x}+a-1$,则 $h'(x)=-\dfrac{ax^2+x+1}{x^2}$.

令 $\varphi(x)=-(ax^2+x+1)(x>0)$. ……………………………………………………………(5 分)

(ⅰ)若 $a\geqslant 0$,则 $\varphi(x)<0$,$h'(x)<0$,$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,注意到 $h(1)=0$,

所以 $g(x)$ 的单调性如下表:

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	极大值	↘

此时 $g(x)$ 有一个极值点. ……………………………………………………………………(7 分)

(ⅱ)若 $a<0$,令 $\varphi(x)=0$,得 $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a}<0$(舍),$x_2=\dfrac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}>0$,易知 $h(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上单调递减,在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………………………………(8 分)

下面讨论 x_2 与 1 的大小关系,由于 $\varphi(1)=-2-a$.

①若 $-2<a<0$,则 $\varphi(1)<0$,$x_2>1$.由 $h(x)$ 的单调性知 $h(x_2)<h(1)=0$,而 $x\to+\infty$ 时,$h(x)\to+\infty$,则存在 $x_0\in(x_2,+\infty)$ 使得 $h(x_0)=0$,因此 $g(x)$ 的单调性如下表:

x	$(0,1)$	1	$(1,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

此时 $g(x)$ 有两个极值点. ……………………………………………………………………(10 分)

②若 $a=-2$,则 $x_2=1$. 又 $h(1)=0$,由 $h(x)$ 的单调性知 $h(x)\geqslant 0$,即 $g'(x)\geqslant 0$,所以 $g(x)$ 单调递增,无极值点. ………………………………………………………………………………(11 分)

综上所述：若 $a\geqslant 0$，则 $g(x)$ 有一个极值点；

若 $-2<a<0$，则 $g(x)$ 有两个极值点；

若 $a=-2$，则 $g(x)$ 没有极值点. ……………………………………………………………（12 分）

22.【命题意图】 本题考查参数方程与极坐标方程的互化、极坐标方程与直角坐标方程的互化，极坐标中 ρ 的几何意义.

【解析】（Ⅰ）直线 l_1 的极坐标方程为 $\theta=\varphi(\rho\in\mathbf{R})$. ……………………………………（1 分）

直线 l_2 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi(\rho\in\mathbf{R})$. ……………………………………（2 分）

由曲线 C 的极坐标方程得 $\rho^2\sin^2\theta=\rho\cos\theta$，

所以 C 的直角坐标方程为 $y^2=x$. ……………………………………………………（4 分）

（Ⅱ）l_1 与 C 的极坐标方程联立得 $\begin{cases}\theta=\varphi,\\ \rho\sin^2\theta=\cos\theta,\end{cases}$ 所以 $\rho_1=\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. ……………………（5 分）

l_2 与 C 的极坐标方程联立得 $\begin{cases}\theta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi,\\ \rho\sin^2\theta=\cos\theta,\end{cases}$ 所以 $\rho_B=\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$. ……………………（6 分）

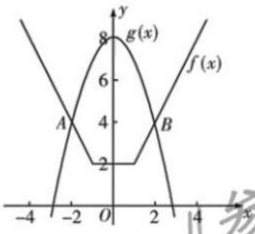
所以 $|OA|\cdot|OB|=|\rho_A\rho_B|=\dfrac{|\cos\varphi|}{\sin^2\varphi}\cdot\dfrac{|\sin\varphi|}{\cos^2\varphi}=\dfrac{1}{|\sin\varphi\cos\varphi|}=\dfrac{2}{|\sin 2\varphi|}$. ……………………（8 分）

所以当 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，$|OA|\cdot|OB|$ 取最小值 2. ……………………（10 分）

23.【命题意图】 本题考查绝对值不等式、基本不等式.

【解析】（Ⅰ）$f(x)=|x-1|+|x+1|=\begin{cases}2x(x>1),\\ 2(-1\leqslant x\leqslant 1),\\ -2x(x<-1).\end{cases}$ ……………………（2 分）

令 $g(x)=8-x^2$，作出它们的大致图象如下：



…………………………………………………………………………………………（4 分）

由 $8-x^2=2x\Rightarrow x=2$ 或 $x=-4$（舍），得点 B 横坐标为 2，由对称性知，点 A 横坐标为 -2，

因此不等式 $f(x)\leqslant 8-x^2$ 的解集为 $[-2,2]$. ……………………………………（5 分）

（Ⅱ）$f(x)=|x-a|+|x+b|\geqslant|(x+b)-(x-a)|=|a+b|=a+b=1$. ……………………（6 分）

$\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{2b}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{2b}\right)[(a+1)+b]=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{b}{a+1}+\dfrac{a+1}{2b}+\dfrac{1}{2}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}\right)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

…………………………………………………………………………………………（9 分）

取等号的条件为 $\dfrac{b}{a+1}=\dfrac{a+1}{2b}$，即 $a+1=\sqrt{2}b$，联立 $a+b=1$ 得 $\begin{cases}a=3-2\sqrt{2},\\ b=2\sqrt{2}-2.\end{cases}$

因此 $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{2b}$ 的最小值为 $\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………（10 分）

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国强基计划、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国中学大联考 2020 届高三下学期模考试题及答案汇总（更新下载中），点击链接获得

http://www.zizzs.com/c/202002/42364.html