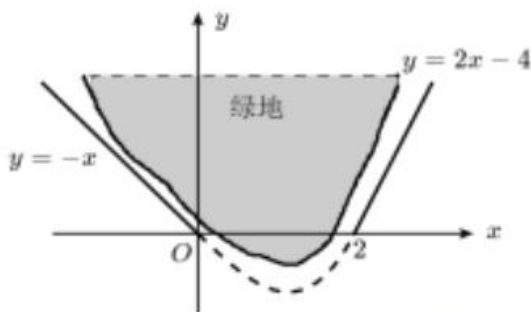


2022—2023 学年度第一学期教学质量检查

高三数学

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。请把正确选项在答题卡中的相应位置涂黑。

1. 设集合  $A = \{x | x \geq 1\}$ ,  $B = \{x | x^2 - x - 2 < 0\}$ , 则  $A \cup B =$   
 A.  $\{x | x > -1\}$       B.  $\{x | x \geq 1\}$       C.  $\{x | -1 < x < 1\}$       D.  $\{x | 1 \leq x < 2\}$
2. 已知复数  $z$  满足  $z \cdot i = 1 + i$  ( $i$  为虚数单位), 则  $|z| =$   
 A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       B. 1      C.  $\sqrt{2}$       D. 2
3. 已知向量  $\overline{AB} = (4, 3)$ ,  $\overline{AC} = (3, t)$ ,  $|\overline{BC}| = 1$ , 则  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$  等于  
 A. 3      B. 4      C. 15      D. 21
4. 如图, 某公园需要修建一段围绕绿地的弯曲绿道 (图中虚线) 与两条直道 (图中实线) 平滑连续 (相切), 已知环绕绿地的弯曲绿道为某三次函数图象的一部分, 则该函数的解析式为



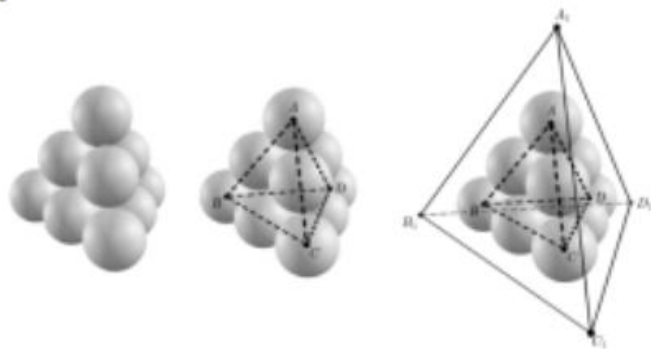
- A.  $y = \frac{1}{4}x^3 - x$       B.  $y = \frac{1}{4}x^3 - x^2 - x$       C.  $y = -\frac{1}{4}x^3 + x$       D.  $y = -\frac{1}{4}x^3 + x^2 + x$
5. 已知  $F$  为抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点,  $P$  为抛物线上任意一点,  $O$  为坐标原点, 若  $|PF| = 3$ , 则  $|OP| =$   
 A.  $2\sqrt{2}$       B. 3      C.  $2\sqrt{3}$       D.  $\sqrt{17}$
6. 甲, 乙, 丙, 丁四人在足球训练中进行传球训练, 从甲开始传球, 甲等可能地把球传给乙, 丙, 丁中的任何一个人, 以此类推, 则经过 3 次传球后乙恰接到 1 次球的概率为  
 A.  $\frac{14}{27}$       B.  $\frac{5}{9}$       C.  $\frac{16}{27}$       D.  $\frac{17}{27}$
7. 已知一个装满水的圆台形容器的上底半径为 6, 下底半径为 1, 高为  $5\sqrt{3}$ , 若将一个铁球放入该容器中, 使得铁球完全没入水中, 则可放入的铁球的体积的最大值为  
 A.  $4\sqrt{3}\pi$       B.  $32\sqrt{3}\pi$       C.  $\frac{125\sqrt{3}\pi}{2}$       D.  $108\pi$
8. 已知实数  $a, b$  满足  $e^a + a = b + \ln b + 1$ , 则下列选项中一定正确的是  
 A.  $b > e^a$       B.  $b < e^a$       C.  $b < a + 1$       D.  $b > a + 1$

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。请把正确选项在答题卡中的相应位置涂黑。

9. 已知二项式  $(1+\sqrt{x})^{2023}$ ，则下列结论正确的是
- A. 该二项展开式中二项式系数和与各项系数和相等  
 B. 该二项展开式中不含有理项  
 C. 该二项展开式中的常数项是 1  
 D. 该二项展开式中含  $x$  的项系数是  $2023 \times 2022$
10. 已知  $f(x)$  满足  $f(x) = f(x+2\pi)$ ，且  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上单调递增，则  $f(x)$  可以是
- A.  $f(x) = \sin x + \cos x$     B.  $f(x) = \sin x - \cos x$     C.  $f(x) = \sin x \cos x$     D.  $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$
11. 已知正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ， $E, F, G$  分别为  $BC, CC_1, BB_1$  的中点，则下列结论正确的是
- A. 直线  $B_1C$  与直线  $AF$  垂直                      B. 直线  $A_1G$  与平面  $D_1EF$  平行  
 C. 平面  $D_1EF$  与平面  $A_1B_1CD$  垂直              D. 点  $C$  和点  $A_1$  到平面  $D_1EF$  的距离相等
12. 已知直线  $l: y = kx + m$  与椭圆  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  交于  $A, B$  两点，点  $F$  为椭圆的右焦点，则下列结论正确的是
- A. 当  $m = k$  时，存在  $k \in \mathbf{R}$  使得  $|\overline{FA}| + |\overline{FB}| = 4$   
 B. 当  $m = k$  时， $|\overline{FA} + \overline{FB}|$  的最小值为 2  
 C. 当  $k = 1$  时，存在  $m \in \mathbf{R}$  使得  $|\overline{FA}| + |\overline{FB}| = 4$   
 D. 当  $k = 1$  时， $|\overline{FA} + \overline{FB}|$  的最小值为 2

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。请把答案填在答题卡的相应位置上。

13. 已知函数  $f(x) = \frac{a}{2^x - 1} + \frac{1}{2}$  是奇函数，则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
14. 设  $f(x) = \cos 2x$  的导函数为  $f'(x)$ ，若  $h(x) = f(x) + f'(x)$  关于  $(a, 0)$  对称，则  $\tan 2a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
15. 已知点  $P$  为直线  $y = \sqrt{5}$  上一动点，过点  $P$  作圆  $x^2 + y^2 = 4$  的切线，切点分别为  $A, B$ ，且  $\angle APB \geq 90^\circ$ ，则动点  $P$  的轨迹的长度为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
16. 南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法·商功》中记载了“三角垛”。如图，某三角垛最上层有 1 个球，第二层有 3 个球，第三层有 6 个球，每个球的半径相等，且相邻的球都外切，记由球心  $A, B, C, D$  构成的四面体的体积为  $V_1$ ，记能将该三角垛完全放入的四面体  $A_1 - B_1C_1D_1$  的体积为  $V_2$ ，则  $\frac{V_1}{V_2}$  的最大值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



高三数学 第2页 (共4页)

**四、解答题:**本大题共6小题,第17题10分,18、19、20、21、22题各12分,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.必须把解答过程写在答题卡相应题号指定的区域内,超出指定区域的答案无效.

17. (本小题满分10分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且对于任意的  $n \in \mathbf{N}^+$  都有  $3S_n = 2a_n + 1$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 记数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项中的最大值为  $M_n$ , 最小值为  $m_n$ , 令  $b_n = \frac{M_n + m_n}{2}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前 20 项和  $T_{20}$ .

18. (本小题满分12分)

已知在锐角  $\triangle ABC$  中,  $M$  是  $BC$  的中点, 且  $AB=4$ ,  $AC=2$ .

(1) 求  $\frac{\sin \angle BAM}{\sin \angle MAC}$  的值;

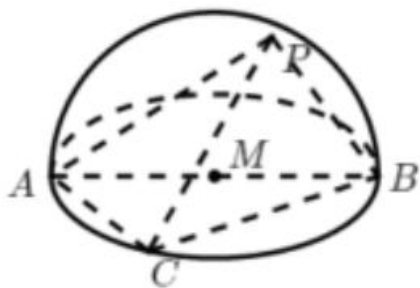
(2) 若  $\cos \angle MAC = \frac{\sqrt{6}}{4}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

19. (本小题满分12分)

如图,  $AB$  为半球  $M$  的直径,  $C$  为  $\widehat{AB}$  上一点,  $P$  为半球面上一点, 且  $AC \perp PC$ .

(1) 证明:  $PB \perp PC$ ;

(2) 若  $AC = AM = 2$ ,  $PB = \sqrt{6}$ , 求直线  $PC$  与平面  $PAB$  所成的角的正弦值.



20. (本小题满分 12 分)

现有一种射击训练,每次训练都是由高射炮向目标飞行物连续发射三发炮弹,每发炮弹击中目标飞行物与否相互独立.已知射击训练有  $A, B$  两种型号的炮弹,对于  $A$  型号炮弹,每发炮弹击中目标飞行物的概率均为  $p$  ( $0 < p \leq 0.4$ ),且击中一弹目标飞行物坠毁的概率为 0.6,击中两弹目标飞行物必坠毁;对于  $B$  型号炮弹,每发炮弹击中目标飞行物的概率均为  $q$  ( $0 < q < 1$ ),且击中一弹目标飞行物坠毁的概率为 0.4,击中两弹目标飞行物坠毁的概率为 0.8,击中三弹目标飞行物必坠毁.

(1) 在一次训练中,使用  $B$  型号炮弹,求  $q$  满足什么条件时,才能使得至少有一发炮弹命中目标飞行物的概率不低于 0.936;

(2) 若  $p+q=1$ ,试判断在一次训练中选用  $A$  型号炮弹还是  $B$  型号炮弹使得目标飞行物坠毁的概率更大?并说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

已知  $F_1(-2,0), F_2(2,0)$  为双曲线  $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左右焦点,点  $\left(2, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$  在双曲线

$E$  上,  $O$  为坐标原点.

(1) 求双曲线  $E$  的标准方程;

(2) 若不与坐标轴平行的动直线  $l$  与双曲线  $E$  相切,分别过点  $F_1, F_2$  作直线  $l$  的垂线,垂足为  $P, Q$ ,求  $\triangle OPQ$  面积最大值.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = (x-1)e^x - 2ax^2$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 设函数  $g(x) = (x-2)e^x + 2x - \sin x$ ,若对任意的  $x \geq 0$ ,  $f'(x) \geq g'(x)$  恒成立 ( $f'(x), g'(x)$  分别是  $f(x), g(x)$  的导函数),求实数  $a$  的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



自主选拔在线  
微信号: zizzsw



自主选拔在线  
微信号: zizzsw



自主选拔在线  
微信号: zizzsw