

机密★2023年4月8日

## 江西省名校协作体联盟第二次联考模拟考试

# 数学(理科)试卷

题号	一	二	三	四	五	六	总分	累分人	座位号
得分									

说明： 1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回

**一、选择题：本大题包括12小题，每小题5分，共60分。在每题给出的四个选项中，只有一个是正确的。**

1. 若  $z=(i+1)^{2023}$ ，则  $z$  的虚部是 ( )

- A.  $2^{1011}$                       B.  $-2^{1011}$                       C.  $2^{1011}i$                       D.  $-2^{1011}i$

2. 已知  $A: \{y|y = \ln(2\sin 2x)\}$ ， $B: \{x \in \mathbb{Z} | (x-3)(x+3) \leq 0\}$ ，则  $A \cap B$  为 ( )

- A.  $\{1, -2, -3\}$                       B.  $\{-1, 2, 3\}$                       C.  $\{-3, -2, -1, 0\}$                       D.  $\{-3, -2, -1, 1\}$

3. 记全集为  $U$ ， $\bar{p}$  为  $p$  的否定， $\bar{q}$  为  $q$  的否定，且  $\bar{p}$  的必要条件是  $q$  的必要条件，则 ( )

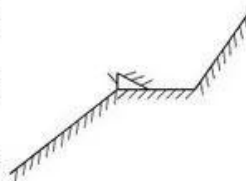
- A. 存在  $q$  的必要条件是  $q$  的充分条件      B.  $p \cup q = U$                       C. 任意  $q$  的必要条件是  $\bar{p}$  的必要条件      D. 存在  $\bar{q}$  的充分条件是  $p$  的必要条件

4. 2022北京冬奥会顺利召开，滑雪健将谷爱凌以2金1银的优秀成绩

书写了自己的传奇，现在她从某斜坡上滑下，滑过一高度不计的滑板后

落在另一斜坡上，若滑板与水平地面夹角的正切值为  $\frac{2}{3}$ ，斜坡与水平

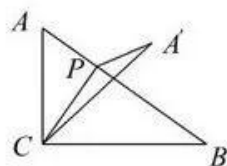
地面夹角的正切值为  $\frac{4}{3}$ ，那么她最后落在斜坡上速度与水平夹角的正切值为 ( )



(不计空气阻力和摩擦力)

- A. 3                      B.  $\frac{10}{3}$                       C.  $\frac{11}{3}$                       D. 4
5. 生物中 DNA 转录为 RNA 时服从碱基互补配对原则, 即:  $A \rightarrow U, C \rightarrow G, G \rightarrow C, T \rightarrow A$ , 但许多化学因子能修饰碱基, 使其转录出不同的产物, 比如 X 标记处理后的碱基互补配对原则变为:  $A^X \rightarrow G, C^X \rightarrow G, G^X \rightarrow A, T^X \rightarrow A$ , 现在小明将 2 个 A, 两个 C, 两个 G, 两个 T, 一个 X 标记组成一个 DNA 分子, 则其转录出的 RNA 有 ( ) 种

- A. 8400                      B. 6720                      C. 5880                      D. 4200
6. 在直角  $\triangle ABC$ , 中  $|AC|=2, \angle C=90^\circ$ , AB 上有一动点 P, 将  $\triangle ACP$  沿 CP 折起使得二面角  $A'-CP-B=60^\circ$ , 则当  $A'B$  最小值最小时, BC 为 ( )



- A.  $\frac{3}{2}$                       B.  $\frac{8}{3}$                       C. 2                      D.  $\frac{5}{2}$
7. 李华在研究化学反应时, 把反应抽象为小球之间的碰撞, 而碰撞又分为有效碰撞和无效碰撞, 李华有 3 个小球 a 和 3 个小球 b, 当发生有效碰撞时, a, b 上的计数器分别增加 2 计数和 1 计数, a, b 球两两发生有效碰撞的概率均为  $\frac{1}{2}$ , 现在李华取三个球让他们之间两两碰撞, 结束后从中随机取一个球, 发现其上计数为 2, 则李华一开始取出的三个球里, 小球 a 个数的期望是 ( ) 个

- A. 1.2                      B. 1.6                      C. 1.8                      D. 2
8. 实数  $a, b > 0$ , 满足:  $a^3 + b^3 + 7ab = 9$ , 则  $a + b$  的范围是 ( )
- A.  $(2, \frac{7}{3})$                       B.  $[2, \frac{7}{3})$                       C.  $(2, \sqrt[3]{9})$                       D.  $[2, \sqrt[3]{9})$

9. 在  $\triangle ABC$  中  $2\sin A + \sin B = 2\sin C$ , 则  $\frac{5}{\sin A} + \frac{9}{\sin C}$  的最小值为 ( )
- A. 14                      B. 16                      C. 18                      D. 20
10. 已知双曲线  $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 其左右顶点分别为  $A_1, A_2$ , P 在双曲线右支上运动, 若  $\angle A_1PA_2$  的角平分线交 x 轴于 D 点,  $A_2$  过 PD 的对称点为  $A_3$ , 若仅存在 2 个 P 使  $A_3D$  与 E 仅有一个交点, 则 E 离心率的范围为 ( )

- A.  $(1, \sqrt{2})$       B.  $(\sqrt{2}, 2)$       C.  $(\sqrt{2}, +\infty)$       D.  $(2, +\infty)$

11.  $a = \ln 2, b = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, c = \ln 3 - \frac{1}{\sqrt[3]{15}}$ , 则 ( )

- A.  $a > b > c$       B.  $b > a > c$       C.  $c > a > b$       D.  $b > c > a$

12.  $f(x) = e^{x+1} - e^{1-x} - ax - a \sin x + e \cos a$ ,  $f(x)$  上存在  $A, B, C, D$  四点使得四边形  $ABCD$  为正方形, 则  $a$  的取值可以是以下的几个 ( )

- ① 3    ②  $e+1$     ③ 4    ④  $e+2$     ⑤ 5

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

## 二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 平面向量  $a, b, c, d$  满足  $|a| = |b| = |c| = |d| = 1, a + b + c = 0$ , 则  $|d-a| + |d-b| + |d-c|$  的取值范围为 \_\_\_\_\_。

14. 若存在  $x$  使  $a^{2\sin^2 x} + a^{\cos 2x} \geq 2$ , 则  $a$  的取值范围为 \_\_\_\_\_。

15. 圆  $O: x^2 + y^2 = 4, P(3, 4)$  过  $P$  作圆  $O$  的切线  $PM, PN$ , 过  $P$  作斜率为 1 的直线  $l$  与圆  $O$  交于点  $Q$  ( $Q$  在  $\triangle PMN$  内), 线段  $MN$  上有一点  $D$  使  $\angle DQN + \angle PQM = 180^\circ$ , 则  $D$  的坐标为 \_\_\_\_\_。

16. 若  $f(x) = \frac{x^{x-1}}{\ln x} + x^{x-2} - e^x$ , 设  $f(x)$  的零点分别为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则  $n =$  \_\_\_\_\_,

$\sum_{i=1}^n [x_i] =$  \_\_\_\_\_。 (其中  $[a]$  表示  $a$  的整数部分, 例如:  $[2.1] = 2, [\pi] = 3$ )

## 三、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分)

在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A, \angle B, \angle C$  对应的边分别为  $a, b, c, a = 2, \sin^2 B + \sin^2 C - \sqrt{3} \sin B \sin C = \frac{1}{4}$

(1) 若存在  $B \geq 120^\circ$ , 求  $A$

(2) 在 (1) 的条件下, 若  $P$  是  $\triangle ABC$  内一点, 过  $P$  作  $AB, BC, AC$  垂线, 垂足分别为  $D, E,$

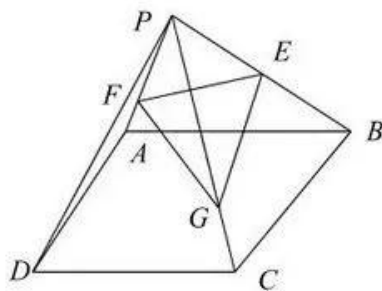
$F$ , 求  $T = \frac{|AB|}{|PD|} + \frac{4|BC|}{|PE|} + \frac{|AC|}{|PF|}$  的最小值.

18. (12分)

正四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA=AB=2$ ,  $E$  为  $PB$  中点,  $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AP}$ ,  $\overrightarrow{CG}=\mu\overrightarrow{CP}$ , 面  $EFG \cap$  面  $ABCD=l$ , 面  $EFG \cap AD=K$

(1) 证明: 当面  $EFG \perp$  面  $PBD$  时,  $l \perp$  面  $PBD$

(2) 当  $\lambda=\mu=\frac{1}{3}$  时,  $T$  为  $P-ABCD$  表面上一动点 (包括顶点), 若有且仅有 5 个  $T$  满足  $2\sqrt{2}|TP|^2+|TA|^2+|TB|^2+|TC|^2+|TK|^2=m$ , 求  $m$



19. (12分)

已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 圆  $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ , 圆  $C$  与椭圆  $E$  有且仅有三个交点, 直线  $l$  过点  $(-\frac{2}{3}, 0)$  与  $E$  交于  $A, B$  两点, 当  $l$  斜率不存在时,  $|AB| = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

(1) 求椭圆  $E$  的方程

(2) 过  $A, B$  分别作  $AC, BD$ , 与圆  $C$  相切交椭圆  $E$  分别于  $C, D$  两点, 若  $k_{CD} = \frac{1}{48}$ , 求直线  $CD$

20. (12分)

已知  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \ln(2ax \ln x + \frac{1}{a})$

(1) 若  $a=1$ , 讨论  $f(x)$  单调性

(2) 若  $f(x) \geq 1$ , 求  $a$  的范围

21. (12分)

小刚在闲暇之时设计了如下一个 "数列"  $\{a_n\}$  满足:  $a_1=1$ , 当  $a_n$  为偶数时,  $a_{n+1}=1$ , 当  $a_n$  为奇数时,  $a_{n+1}$  有  $\frac{1}{2}$  的几率为  $a_n+1$ , 有  $\frac{1}{2}$  的几率为  $a_n+2$

(1) 求  $a_5$  的分布列和数学期望

(2) 求  $a_n$  的前  $n$  项和  $S_n$  的数学期望

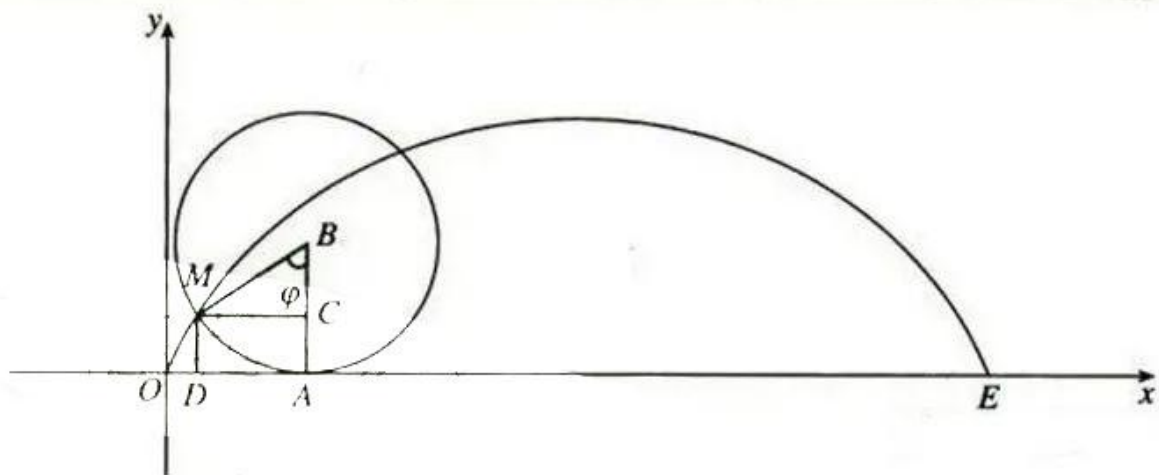
四、选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做,

则按所做的第一题计分.

22(极坐标与参数方程). (10分)

研究某点轨迹时,数学上常常用向量来表示一个点.例如: $M$ 是车轮边缘的一点,初始态在原点,车轮半径为 $r$ ,轮子沿着 $x$ 轴滚动, $M$ 点的轨迹 $(x, y)$ 即为摆线

- (1) 若以车轮旋转角度为参数,请写出 $M$ 轨迹的参数方程
- (2) 若坐标原点处固定一半径为 $r$ 的轨道,现在让车轮沿着该轨道转一圈, $M$ 初始态在 $(r, 0)$ 点,试写出 $M$ 轨迹的参数方程



23(不等式选讲). (10分)

已知 $a + b + c = 3, a, b, c > 0$

- (1) 求证 $a^2b + b^2c + c^2a < 4$
- (2) 求 $a^2b + b^2c + c^2a + a^2c + b^2a + c^2b$ 的范围



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京,旗下拥有网站(网址:[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com))和微信公众平台等媒体矩阵,用户群体涵盖

全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

线  
zizzsw



 自主选拔在线  
微信号：zizzsw

 自主选拔在线  
微信号：zizzsw

 自主选拔在线  
微信号：zizzsw