江西师大附中2023届高三三模考试数学（理）试卷答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	C	D	C	B	B	C	A	D	A	B

二、填空题

13. 3　　14. 0　　15. $\frac{19}{48}$　　16. $\frac{\sqrt{7}-1}{3}$

8. 如果把这些数列的第一项依次排列构成的数列记为$\{P_n\}$，

则 $P_1=1,P_2-P_1=2,P_3-P_2=2^2,\cdots,P_n-P_{n-1}=2^{n-1}$，

$P_n=P_1+(P_2-P_1)+\ldots+(P_n-P_{n-1})=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$，

则 $P_1+P_2+\cdots+P_{10}=(2+2^2+\cdots+2^{10})-10=2036$

故选 C.

9. 由平面 $BDE\perp$ 平面 A_1BD，则 E 是 CC_1 的中点，又四面体 $ABCE$ 的外接球的直径为 $AE=3$，半径 $R=\frac{3}{2}$，设 M 是 AE 的中点即球心，球心 M 到平面 A_1BD 的距离为 d，

又设 AC 与 BD 的交点为 O，则 $\cos\angle A_1OA=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

则 $\sin\angle A_1OM=\cos\angle A_1OA=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

则 $d=OM\sin\angle A_1OM=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

则截面圆的半径 $r^2=R^2-d^2=\frac{9}{4}-\frac{1}{12}=\frac{26}{12}=\frac{13}{6}$，

所以截面圆的面积为 $\pi r^2=\frac{13}{6}\pi$。选 A

10. 由图知 $\begin{cases}\frac{T}{2}<\frac{2\pi}{3}\\ \frac{3T}{4}>\frac{2\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow\frac{3}{2}<\omega<\frac{9}{4}$, 又 $f(0)=\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2},0<\varphi<\pi\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$，

$f(\frac{2\pi}{3})=\sin(\frac{2\pi}{3}\omega+\varphi)=0\Rightarrow\frac{2\pi}{3}\omega+\varphi=k\pi(k\in Z)$，

若 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，$\omega=\frac{3k-1}{2}$, 无解；若 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$，$\omega=\frac{3k-2}{2}\Rightarrow\omega=2$，

所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$，向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 得到 $g(x)=\sin 2x$，

因此 A、B、C 错，D 对
故选 D。
11.设弧 AB 的中点为 H，弦 AB 的中点为 G，圆心为 O，拱圈的顶点为 P，

有 $PH=45$，$OB=50, BG=25\sqrt{2}$，则 $OG=25\sqrt{2}\approx 35 \Rightarrow GH=50-35=15$，

设 $\angle PGH=\alpha$，则 $\tan\alpha=\dfrac{PH}{GH}=\dfrac{45}{15}=3$，

根据对称性两个拱圈所在平面的夹角的余弦值为：

$$\cos 2(90^0-\alpha)=-\cos 2\alpha=\frac{-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{-1+\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{4}{5},$$

故选 A。

12.$e^{x-\ln x}+a(\ln x-x)+e^2\geq 0$ 在 x>0 上恒成立，

令 $t=x-\ln x(x>0)\Rightarrow t\geq 1$，

即 $e^t-at+e^2\geq 0$ 在 $t\geq 1$ 上恒成立。

$a\leq(\dfrac{e^t+e^2}{t})_{\min}=e^2$，故选 B

15.因为甲乙丙在同一车厢的概率为：$\dfrac{2}{4\times4\times6}=\dfrac{1}{48}$，

甲乙在同一车厢的概率为：$\dfrac{2}{4\times4}=\dfrac{1}{8}$，

甲丙在同一车厢的概率为：$\dfrac{4}{4\times6}=\dfrac{1}{6}$，

乙丙在同一车厢的概率为：$\dfrac{4}{4\times6}=\dfrac{1}{6}$，

则甲乙丙恰有 2 人在同一车厢的概率为：$\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{48}\times3=\dfrac{19}{48}$。

16.以 A 为原点，AB 为 x 轴，建立如图的直角坐标系，

则 $B(200,0), C(100,100)$，

可求曲边 AC 的方程为：$y^2=100x(0\leq x\leq 100)$，BC 的方程为：$x+y=200$，

设 $H(\dfrac{{y_0}^2}{100},y_0)$，则 $G(200-y_0,y_0)(0<y_0<100)$，

$$S=S_{EFGH}=(200-y_0-\frac{{y_0}^2}{100})\cdot y_0=-\frac{1}{100}({y_0}^3+100{y_0}^2-20000y_0),$$

$$S'=-\frac{1}{100}(3{y_0}^2+200y_0-20000),$$

令 $S'=0\Rightarrow y_0=\dfrac{-100\pm100\sqrt{7}}{3}$，负值舍去，则 $y_0=\dfrac{100(\sqrt{7}-1)}{3}$，

则 S 在 $(0,y_0)$ 递增，在 $(y_0,100)$ 递减，所以当 $y_0=\dfrac{100(\sqrt{7}-1)}{3}$ 时，S 最大，

此时 $\dfrac{BG}{BC}=\dfrac{y_0}{100}=\dfrac{\sqrt{7}-1}{3}$。

17.解：（1）$S_nS_{n+1}=n(n+1)(S_{n+1}-S_n)$，显然 $S_nS_{n+1}\neq0$，

$$\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},\quad \frac{1}{S_{n+1}}-\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n},$$

$$\frac{1}{S_n}=(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}})+(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_{n-2}})+\cdots+(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_1})+\frac{1}{S_1}$$

$$=(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1})+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-2})+\cdots+(\frac{1}{2}-1)+2==\frac{1}{n}+1=\frac{n+1}{n},$$

所以 $S_n=\dfrac{n}{n+1}$。

（2）由（1）知 $S_n=\dfrac{n}{n+1}$，则 $a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$，

得 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}(n\geq2)$，$a_1=\dfrac{1}{2}$ 也满足，

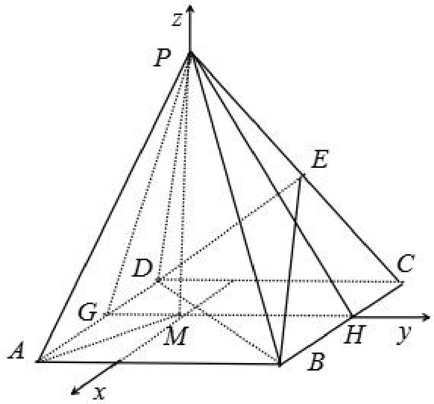
所以 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}(n\in N^*)$，

则 $b_n=\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$，

则 $T_n=(1-\dfrac{1}{2^2})+(\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2})+\cdots+(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2})=1-\dfrac{1}{(n+1)^2}=\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$。

18.解：（1）连 PG、GH、PH，由于 G、H 分别是 AD 和 BC 的中点，
且 PA=PD,则 $AD\perp PG$，
又 ABCD 是正方形，则 GH//CD,GH⊥AD,
又 PG∩GH=G，则 $AD\perp$ 平面 PGH,
则平面 $PGH\perp$ 平面 $ABCD$，
过 P 作 PM⊥GH 于 M,则 PM⊥平面 ABCD，
所以点 P 在 $ABCD$ 上的射影 M 在线段 GH 上，连 AM，

则 $\tan\angle PAM=\dfrac{4}{\sqrt{13}},\sin\angle PAM=\dfrac{4}{\sqrt{29}}$，



则 $PM=4,AM=\sqrt{13},GM=2$，

因为 $GH=6$，所以 $\dfrac{GM}{MH}=\dfrac{1}{2}$.

（2）以 M 为原点，MH 为 y 轴，MP 为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $B(3,4,0)$，$C(-3,4,0)$，$D(-3,-2,0)$，$P(0,0,4)$，$E(-\dfrac{3}{2},2,2)$，

$\overrightarrow{DB}=(6,6,0),\overrightarrow{DE}=(\dfrac{3}{2},4,2),\overrightarrow{DC}=(0,6,0)$，

设平面 BDE 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DB}=6x+6y=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DE}=\dfrac{3}{2}x+4y+2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-y\\ z=-\dfrac{5}{4}y\end{cases}$，取 $y=-4$，则 $\overrightarrow{n_1}=(4,-4,5)$，

同理可求平面 PCD 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(4,0,-3)$，

$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{1}{5\sqrt{57}}=\dfrac{\sqrt{57}}{285}$，

所以二面角 $B-DE-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{57}}{285}$。

19.解：由题意知，每位球员踢球一次积 3 分的概率为 $\dfrac{1}{5}$，积 2 分的概率为 $\dfrac{2}{5}$，积 1 分的概率为 $\dfrac{3}{10}$，积 0 分的概率为 $\dfrac{1}{10}$，

(1) $P(X=3+3+3)=(\dfrac{1}{5})^3=\dfrac{1}{125}$，

$P(X=3+3+2)=C_3^2(\dfrac{1}{5})^2\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{125}$，

$P(X=3+3+1)=C_3^2(\dfrac{1}{5})^2\cdot\dfrac{3}{10}=\dfrac{9}{250}$，

$P(X=3+2+2)=C_3^2(\dfrac{2}{5})^2\cdot\dfrac{1}{5}=\dfrac{12}{125}$，

则 $P(X\geq 7)=\dfrac{1}{125}+\dfrac{6}{125}+\dfrac{9}{250}+\dfrac{12}{125}=\dfrac{47}{250}$。

（2）因为 Y 的可能值为 0、1、2、3、4、5、6，

则 $P(Y=0)=\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{100}$，

$P(Y=1)=\frac{1}{10}\times\frac{3}{10}\times2=\frac{6}{100}$，

$P(Y=2)=\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{10}\times2=\frac{17}{100}$，

$P(Y=3)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{10}\times2+\frac{2}{5}\times\frac{3}{10}\times2=\frac{28}{100}$，

$P(Y=4)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{10}\times2=\frac{28}{100}$

$P(Y=5)=\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\times2=\frac{16}{100}$，

$P(Y=6)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{100}$，

所以 Y 的分布列为：

Y	0	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{17}{100}$	$\frac{28}{100}$	$\frac{28}{100}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{4}{100}$

$\therefore EY=0\times\frac{1}{100}+1\times\frac{6}{100}+2\times\frac{17}{100}+3\times\frac{28}{100}+4\times\frac{28}{100}+5\times\frac{16}{100}+6\times\frac{4}{100}=3.4$。

20. （1）由题意知 $\angle F_1GF_2=90^0$,则 $S_{\Delta GF_1F_2}=\frac{1}{2}|GF_1||GF_2|=1\Rightarrow|GF_1||GF_2|=2$

又 $|GF_1|^2+|GF_2|^2=|F_1F_2|^2=4c^2$，

则 $(|GF_1|+|GF_2|)^2-2|GF_1||GF_2|=4c^2\Rightarrow4a^2-4=4c^2\Rightarrow a^2-c^2=1$，

又 $r_{内}=\frac{2S_{\Delta GF_1F_2}}{2a+2c}=2-\sqrt{3}\Rightarrow a+c=2+\sqrt{3}$，

解得 $a=2,c=\sqrt{3}$， $b=1$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$。

(2)设直线 DE 的方程为 $y-1=k(x+2),k<0$， $D(x_1,y_1),E(x_2,y_2)$

联立方程组 $\begin{cases}y=kx+2k+1\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}$，可得 $(1+4k^2)x^2+8k(2k+1)x+16k^2+16k=0$

则 $\Delta>0$， $x_1+x_2=\frac{-8k(2k+1)}{1+4k^2},x_1\cdot x_2=\frac{16k(k+1)}{1+4k^2}$

$1_{AD}:y=\frac{y_1-1}{x_1}x+1\Rightarrow x_M=\frac{x_1}{1-y_1}$，同理 $x_N=\frac{x_2}{1-y_2}$

$\because y_1=kx_1+2k+1, y_2=kx_2+2k+1, \therefore y_1-y_2=k(x_1-x_2)$

$$x_N-x_M=\frac{x_2}{-k(x_2+2)}-\frac{x_1}{-k(x_1+2)}=\frac{2(x_1-x_2)}{k(x_1+2)(x_2+2)}$$

$$\therefore S_{DMEN}=\frac{1}{2}|x_N-x_M||y_1-y_2|=\left|\frac{(x_1-x_2)^2}{(x_1+2)(x_2+2)}\right|=\left|\frac{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}\right|$$

$$=\frac{-16k}{4k^2+1}=\frac{16}{(-4k)+(-\frac{1}{k})}\le\frac{16}{4}=4$$

当且仅当 $k=-\frac{1}{2}$ 时，四边形 $DMEN$ 的面积最大，最大值为 4.

21.解（1）函数 $h(x)=f(x)+g(x)=\frac{a}{x^2}+\frac{\ln x}{x}$ 的定义域为 $[\frac{1}{e},e]$

求导得：$h'(x)=\frac{x-x\ln x-2a}{x^3}\ge 0$ 恒成立

则 $2a\le x-x\ln x$ 在 $[\frac{1}{e},e]$ 恒成立，令 $u(x)=x-x\ln x$, 则 $u'(x)=-\ln x$

当 $x\in[\frac{1}{e},1], u'(x)>0$, 则 $u(x)$ 单调递增， $x\in[1,e], u'(x)<0$, 则 $u(x)$ 单调递减， 而 $u(\frac{1}{e})=\frac{2}{e}, u(e)=0, \therefore u(x)_{\min}=u(e)=0 \therefore 2a\le 0 \therefore a\le 0$

（2）$\because g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Rightarrow x=e$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,e)\uparrow$，在 $(e,+\infty)\downarrow$，

$\therefore g(x)$ 的唯一极值点 $x_0=e$

因为 $\varphi(x)=\frac{a}{x}+\ln x$, 则 $\varphi'(x)=\frac{x-a}{x^2}$

当 $a\le 0$ 时，$\varphi'(x)>0$ 恒成立，则 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，不合题意

当 $a>0$ 时，$\varphi'(x)<0$ 的解集为 $(0,a)$, $\varphi'(x)>0$ 的解集为 $(a,+\infty)$

即 $\varphi(x)$ 的单调增区间为 $(a,+\infty)$，单调减区间为 $(0,a)$

依题意：$\varphi(x)_{\min}=\varphi(a)=1+\ln a<3$，解得 $a\in(0,e^2)$

设 $x_1<x_2$，则 $0<x_1<a<x_2$，要证 $x_0x_1x_2<ae^3$ 则只要证 $x_1x_2<ae^2$

即证 $a<x_2<\frac{ae^2}{x_1}$，即证 $\varphi(x_2)<\varphi(\frac{ae^2}{x_1})$ 即证：$\varphi(x_1)<\varphi(\frac{ae^2}{x_1})$，

即证 $3<\frac{x_1}{e^2}-\ln x_1+\ln a+2, x_1\in(0,a)$

而 $\frac{a}{x_1}+\ln x_1=3\Leftrightarrow a=x_1(3-\ln x_1)$ 即证 $1<\frac{x_1}{e^2}+\ln(3-\ln x_1), x_1\in(0,a)$，

令 $T(x)=\frac{x}{e^2}+\ln(3-\ln x), x\in(0,e^2)$，则 $T'(x)=-\frac{1}{x(3-\ln x)}+\frac{1}{e^2}$

设 $G(x)=x(3-\ln x), x\in(0,e^2)$，求导得 $G'(x)=2-\ln x>0$

即 $G(x)$ 在 $(0,e^2)$ 上单调递增，则有 $0<G(x)<G(e^2)=e^2$

即 $T'(x)<0, T(x)$ 在 $(0,e^2)$ 上单调递减，而 $(0,a)\subseteq(0,e^2)$

当 $x\in(0,a)$ 时，$T(x)>T(a)>T(e^2)=1$

则当 $x\in(0,a)$ 时，$1<\frac{x}{e^2}+\ln(3-\ln x)$ 成立，故有 $x_1x_2<ae^2$ 成立，

$\therefore x_0x_1x_2<ae^3$

22.解：（1）直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=t\cos\alpha \\ y=2+t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数)，

C：$\rho^2\cos2\theta=4\Rightarrow\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=4\Rightarrow x^2-y^2=4$。

（2）把 l 的参数方程代入 C 中得：$t^2\cos2\alpha-4t\sin\alpha-8=0$，

则 $|PD||PE|=|t_1t_2|=\left|\frac{8}{\cos2\alpha}\right|$，

又直线 GH 的参数方程为 $\begin{cases} x=2\sqrt{2}+t\cos\alpha \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数),代入 C 中得：

$t^2\cos2\alpha+4\sqrt{2}t\cos\alpha+4=0$，可得 $|FG||FH|=\left|\frac{4}{\cos2\alpha}\right|$，

所以 $\frac{|PD||PE|}{|FG||FH|}=2$

23.解：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=|2x+2|+|x-1|=\begin{cases} -3x-1(x<-1) \\ x+3(-1\le x\le1) \\ 3x+1(x>1) \end{cases}$，

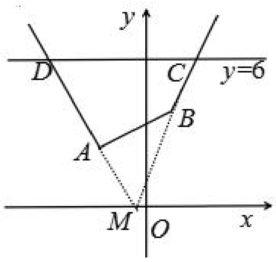
则不等式 $f(x)\le 5$ 可化为：$\begin{cases} x<-1 \\ -3x-1\le 5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ x+3\le 5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x>1 \\ 3x+1\le 5 \end{cases}$，

解得 $-2\le x<-1$ 或 $-1\le x\le 1$ 或 $1<x\le \dfrac{4}{3}$，

所以原不等式的解集为 $[-2,\dfrac{4}{3}]$。

（2）因为 $a>0$,则

$$f(x)=|2x+2|+|x-a|=\begin{cases} -3x-2+a(x<-1) \\ x+2+a(-1\le x\le a) \\ 3x+2-a(x>a) \end{cases},$$



画出 f（x）的大致图像如图，与直线 y=6 围成的四边形为 $ABCD$,

可求 $A(-1,1+a)$，$B(a,2+2a)$，$C(\dfrac{4+a}{3},6)$，$D(\dfrac{-8+a}{3},6)$，

且 $6>2+2a\Rightarrow 0<a<2$，

延长 DA 与 CB 交于点 M，并求出 $M(\dfrac{-2+a}{3},0)$，

$S_{ABCD}=S_{\Delta CDM}-S_{\Delta ABM}=12-\dfrac{2(a+1)^2}{3}=9$，求得 $a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-1\in(0,2)$，

所以存在正数 $a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-1$ 满足要求。