

2023 届高三第八次联考·数学试卷

参考答案

1. B 由题意得 $A = \{x | x^2 - 2x \leq 0\} = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, 则 $A \cup B = \{x | 0 \leq x < 3\}$.
2. D $\because$ 复数 z_1 与 $z = -1 + i$ 在复平面内对应的点关于虚轴对称,
 $\therefore z_1 = 1 + i, \therefore \frac{2z_1 + 1}{1 + i} = \frac{3 + 2i}{1 + i} = \frac{(3 + 2i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{5 - i}{2}$.
3. D 由饼状图可知, 成绩在前 200 名的学生中, 高一人数比高二人数多 $200 \times (45\% - 30\%) = 30$, 正确; 成绩在第 1~50 名的学生中, 高一人数为 $200 \times 45\% \times 0.2 = 18$, 因此高三最多有 32 人, B 正确; 由条形图知高一学生的成绩在第 101~150 名的人数为 $200 \times 45\% \times 0.4 = 36$, 很明显比高三的学生成绩在第 1~50 名的人数多, C 正确; 在第 51~100 名的学生中, 高一人数为 $200 \times 45\% \times 0.3 = 27$, 很明显比高二成绩在第 51~100 名的人数多, D 错误.
4. D 由题意得 $S_{13} = \frac{13(a_1 + a_{13})}{2} = 13a_7 = 39$, 解得 $a_7 = 3$, 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,
 则 $4a_5 - a_2 - a_4 = 4(a_1 + 4d) - (a_1 + d) - (a_1 + 3d) = 2a_1 + 12d = 2(a_1 + 6d) = 2a_7 = 6$.
5. D 对于 A 项, 若 $m \perp \alpha, n \subset \alpha$, 则直线 m, n 可以平行, 也可以异面, 所以 A 错误;
 对于 B 项, 可以得到 m, n 平行或异面或相交, 所以 B 错误;
 对于 C 项, α 与 β 可以平行, 也可以相交, 所以 C 错误.
 对于 D 项, 若 $m \perp \alpha$, 则直线 m 与平面 α 内的所有直线都垂直, 又 $l \parallel m$, $\therefore l$ 与平面 α 内的所有直线都垂直, 根据线面垂直的定义可得 $l \perp \alpha$, 故 D 正确.
6. A 由题意得 $d = \frac{b}{c} = \frac{\log_3 a}{\log_4 a} = \frac{\log_3 4}{\log_4 3} = \log_3 4$,
 所以 $d \log_2 3 = \log_3 4 \times \log_2 3 = \frac{\log_3 4}{\log_3 2} = \frac{2 \log_3 2}{\log_3 2} = 2$.
7. B 因为 B, C, E 四点共线, 所以不妨设 $\overrightarrow{AD} = m \overrightarrow{AB} + (1 - m) \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE} = n \overrightarrow{AB} + (1 - n) \overrightarrow{AC}$,
 则 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = m \overrightarrow{AB} + (1 - m) \overrightarrow{AC} + n \overrightarrow{AB} + (1 - n) \overrightarrow{AC} = (m + n) \overrightarrow{AB} + (2 - m - n) \overrightarrow{AC}$
 $= \frac{4}{3} (m + n) \overrightarrow{AM} + (8 - 4m - 4n) \overrightarrow{AN}$, 可得 $x = \frac{4}{3} (m + n)$, $y = 8 - 4m - 4n$, 则 $3x + y = 4(m + n) + 8 - 4m - 4n = 8$.
8. A 根据程序, 应当先输入一评和二评的分数, 并且将其中较高的分数记为 x_2 , 较低的分数记为 x_1 , 由于最后输出的为 x_1 和 x_2 的平均值, 则 x_1 和 x_2 中必有仲裁分数, 且根据题中“仲裁分数和一、二评中与之接近的分数的平均分为该题得分”, 可得①处得到 x_1 与仲裁分数更加接近, 最终需要将 x_1 与仲裁分数取平均值, 此时需要将 x_2 取为仲裁分数, 即①处应填的语句为 $x_2 = x_3$, 类似地可以得到②处应填的语句为 $x_1 = x_3$. 无界学习公众号



9. A 由题意有 $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos x$, 将图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再将得到的曲线上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$, 得 $g(x) = \cos(\omega x + \frac{\pi}{3})$, 根据函数 $y = g(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ 上单调递减, 得 $T = \frac{2\pi}{\omega} \geq \pi$, 可得 $0 < \omega \leq 2$, 又由 $\frac{\pi}{3} < \frac{\pi\omega}{4} + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}$, 必有 $\frac{3\pi\omega}{4} + \frac{\pi}{3} \leq \pi$, 可得 $0 < \omega \leq \frac{8}{9}$.

10. C 由 $f(x)$ 的解析式, 可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增, 且值域为 $(0, 1]$, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且值域为 $(0, +\infty)$, 函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 所以在 $f(x)$ 的值域 $(0, 1]$ 上, 任意函数值都有两个 x 值与之对应, 在值域 $(1, +\infty)$ 上, 任意函数值都有一个 x 值与之对应.

要使 $F(x) = g(f(x)) - m$ 恰有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 , 则 $g(x)$

与 $y = m$ 的交点的横坐标一个在 $(0, 1]$ 上, 另一个在 $(1, +\infty)$ 上, 由

$g(x) = x^2 - 2x$ 的图象开口向上且对称轴为 $x = 1$, 易知 $-1 < m < 0$,

此时 $g(t_1) = g(t_2) = m$, 且 $0 < t_1 < 1 < t_2 < 2$, $t_1 + t_2 = 2$,

结合 $f(x)$ 的图象及 $x_1 < x_2 < x_3$, 得 $e^{x_1} = 2x_2 = t_1, 2x_3 = t_2$, 则 $x_1 =$

$$\ln t_1, x_2 = \frac{t_1}{2}, x_3 = \frac{t_2}{2},$$

所以 $x_1 - 2x_2 + 4x_3 = \ln t_1 - t_1 + 2t_2 = \ln t_1 - t_1 + 2(2 - t_1) = \ln t_1 - 3t_1 + 4$, 且 $0 < t_1 < 1$,

令 $h(x) = \ln x - 3x + 4$, 且 $0 < x < 1$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - 3 = \frac{1-3x}{x}$

当 $0 < x < \frac{1}{3}$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增; 当 $x > \frac{1}{3}$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减.

所以 $h(x)_{\max} = h(\frac{1}{3}) = 3 - \ln 3$, 故 $x_1 - 2x_2 + 4x_3$ 的最大值为 $3 - \ln 3$.

11. D 记上、右之间的公共边染 a 色, 上、下之间的公共边染 b 色为 $a-b$.

染色种数用表格列举如下:

红-红: $2 \times 3 \times 3 = 18$	红-黄: $2 \times 3 \times 3 = 18$	红-蓝: $2 \times 3 \times 6 = 36$
黄-红: $2 \times 6 \times 3 = 36$	黄-黄: 0	黄-蓝: $1 \times 6 \times 6 = 36$
蓝-红: $2 \times 3 \times 3 = 18$	蓝-黄: $1 \times 3 \times 3 = 9$	蓝-蓝: 0

这样染色的种数为 $N = 3 \times 18 + 3 \times 36 + 1 \times 9 + 2 \times 0 = 171$.

12. C 因为 $3\vec{IA} + 2\vec{IB} + 3\vec{IF}_2 = \vec{0}$, 所以 $\frac{1}{2}\vec{IA} + \frac{1}{2}\vec{IF}_2 = -\frac{1}{3}\vec{IB}$.

如图, 取 AF_2 的中点 M , 连接 IM , 则 $\vec{IM} = -\frac{1}{3}\vec{IB}$,

则点 I 为 BM 上靠近点 M 的四等分点, 所以 $S_{\triangle IAF_2} : S_{\triangle IBF_2} : S_{\triangle IBA} = 2 : 3 : 3$.

所以 $|AF_2| : |BF_2| : |AB| = 2 : 3 : 3$, 设 $|AF_2| = 2x$, 则 $|BF_2| = 3x, |AB| = 3x$,

参考答案 第2页(共8页)

【8LK·数学(理科)-N】



由椭圆的定义可知 $|AF_2| + |BF_2| + |AB| = 4a$, 即

$8x = 4a$, 所以 $x = \frac{a}{2}$, 无界学习公众号

所以 $|AF_2| = a$, $|BF_2| = \frac{3a}{2}$, $|AB| = \frac{3a}{2}$, 由椭圆的定

义可得 $|AF_1| = a$, 故点 A 与上顶点重合. 在 $\triangle ABF_2$ 与 $\triangle AF_1F_2$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle BAF_2 =$

$$\frac{\frac{9}{4}a^2 + a^2 - \frac{9}{4}a^2}{2a^2} = \frac{a^2 + a^2 - 4c^2}{2a^2},$$

解得 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

13.2 $1 + \ln 2$ $f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$, 易得函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值, 且极小值为 $1 + \ln 2$.

14. $y = \pm 2x$ 由对称性可知 A, B 两点关于原点 O 对称, 可得 $|OF| = |OA| = |OB|$, 于是 $AF \perp BF$.

设双曲线的左焦点为 F' , 连接 AF' , BF' , 根据双曲线的对称性可

知, 四边形 $AFBF'$ 为矩形, 由题意以及双曲线的定义,

可得 $|BF'| - |AF'| = |AF'| - |AF| = 2|AF| - |AF| = |AF| =$

$2a$, 则 $|AF| = 4a$, $\angle F'AF = 90^\circ$. 记 $|FF'| = 2c$,

由勾股定理 $|AF'|^2 + |AF|^2 = |FF'|^2$, 即 $16a^2 + 4a^2 = 4c^2$.

将 $c^2 = a^2 + b^2$ 代入, 可得 $\frac{b}{a} = 2$,

所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm 2x$.

15. $\frac{144\pi}{7}$ 设 $AB = AC = a$ ($0 < a < 6$), 则 $CD = 6 - a$,

取正三角形 ABC 的外心为 O , 四面体 $ABCD$ 的外接球球心为

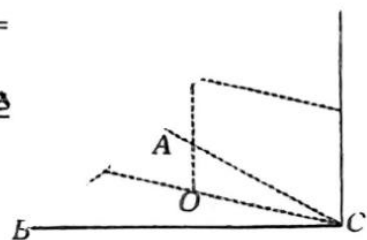
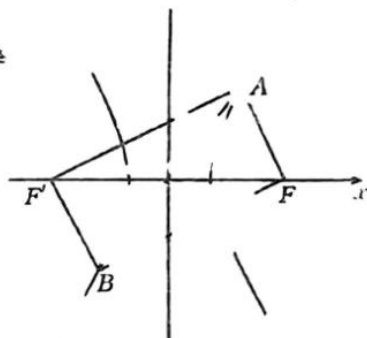
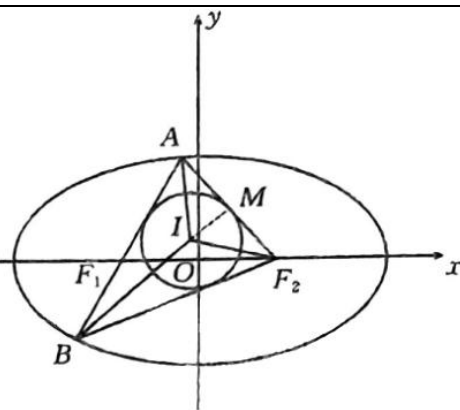
O' , 连接 OO' , 则 $OO' \perp$ 底面 ABC , 底面外接圆的半径 $r =$

$\frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, $OO' = \frac{1}{2}CD = 3 - \frac{a}{2}$, 所以三棱锥外接球的半径

$$R = \sqrt{\frac{1}{3}a^2 + (3 - \frac{a}{2})^2} = \sqrt{\frac{7}{12}a^2 - 3a + 9}$$

当 $a = \frac{18}{7}$ 时, R 有最小值 $\sqrt{\frac{36}{7}} = \frac{6}{7}\sqrt{7}$

所以三棱锥外接球的表面积的最小值为 $4\pi \times (\frac{6}{7}\sqrt{7})^2 = \frac{144\pi}{7}$.





16.3 因为 $a_n = \frac{1}{4}(3^{2n+1} - 4 \cdot 3^n + 1) = \frac{1}{4}(3 \cdot 3^{2n} - 4 \cdot 3^n + 1) = \frac{1}{4}(3^{n+1} - 1)(3^n - 1)$,

设 $b_n = \frac{3^n}{a_n} = \frac{4 \cdot 3^n}{(3^{n+1} - 1)(3^n - 1)} = 2\left(\frac{1}{3^n - 1} - \frac{1}{3^{n+1} - 1}\right)$,

所以 $T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$

$= 2 \cdot \left(\frac{1}{3^1 - 1} - \frac{1}{3^2 - 1} + \frac{1}{3^2 - 1} - \frac{1}{3^3 - 1} + \dots + \frac{1}{3^n - 1} - \frac{1}{3^{n+1} - 1}\right)$

$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^{n+1} - 1}\right)$, 又因为 $3^{n+1} - 1 > 0$, 所以 $2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^{n+1} - 1}\right) < 1$, 所以 $T_n < 1$,

又因为 $\lambda - 2$ 恒成立, 即 $\lambda > T_n + 2$ 恒成立, 所以 $\lambda \geq 3$, 则 λ 的最小值为 3.

解: (1) 由 $a \cos(B - C) + a \cos A = 2\sqrt{3}b \sin C \cos A$,

知 $a \cos(B - C) - a \cos(B + C) = 2\sqrt{3}b \sin C \cos A$,

则 $a \sin B \sin C = \sqrt{3}b \sin C \cos A$, 即 $a \sin B = \sqrt{3}b \cos A$, 2 分

则 $\sin A \sin B = \sqrt{3} \sin B \cos A$, 所以 $\sin A = \sqrt{3} \cos A$,

即 $\tan A = \sqrt{3}$, 故 $A = \frac{\pi}{3}$ 5 分

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由 $\frac{a}{\sin A} = 2\sqrt{3}$ 及正弦定理,

知 $\frac{2\sqrt{3} \sin E}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\sin B}$, 解得 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 7 分

由 $A = \frac{\pi}{3}$, 得 $B < \frac{2\pi}{3}$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$. 无界学习公众号

因为在 $\triangle ABC$ 中, $A + B + C = \pi$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$.

所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 得 $c = b = 3$ 12 分

18. 解: (1) 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时 F 为 B_1C 的中点,

取 BC 的中点 G , 连接 GF, GA ,

有 $GF \parallel BB_1$, 且 $GF = \frac{1}{2}BB_1 = 2$,

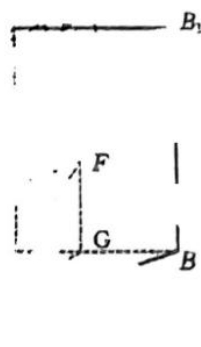
在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \parallel BB_1$,

所以 $GF \parallel AA_1$ 2 分

因为 $AE = \frac{1}{2}AA_1 = 2$,

所以 $FG \parallel AE$ 且 $FG = AE$,

所以四边形 $EFGA$ 为平行四边形,





所以 $EF \parallel AG$.

又 $EF \not\subset$ 平面 ABC , $AG \subset$ 平面 ABC ,

所以 $EF \parallel$ 平面 ABC 5 分

(2) 如图, 以点 C 为原点, 分别以 CA, CB, CC_1 所在的直线为 x 轴、 y 轴和 z 轴, 建立空间直角坐标系 $C-xyz$,

则 $C(0,0,0), A(2\sqrt{2},0,0), E(2\sqrt{2},0,2), B_1(0,2\sqrt{2},4), F(0,2\sqrt{2}\lambda,4\lambda)$, 7 分

则 $\overrightarrow{AF} = (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\lambda, 4\lambda), \overrightarrow{AE} = (0,0,2)$.

设平面 AEF 的法向量为 $m = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{AF} = -2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}\lambda y + 4\lambda z = 0 \\ m \cdot \overrightarrow{AE} = 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{AF} = -2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}\lambda y + 4\lambda z = 0 \\ m \cdot \overrightarrow{AE} = 2z = 0 \end{cases}$$

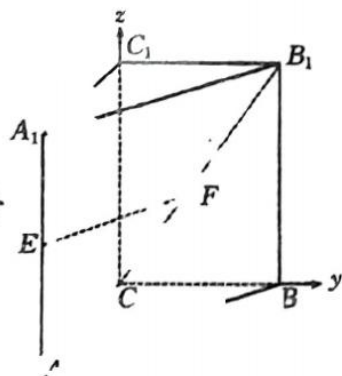
可取 $m = (\lambda, 1, 0)$, 9 分

同理可求平面 ABB_1A_1 的法向量为 $n = (1, 1, 0)$,

当平面 AEF 与平面 ABB_1A_1 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时,

$$|\cos \langle m, n \rangle| = \frac{|m \cdot n|}{|m| |n|} = \frac{|\lambda + 1|}{\sqrt{\lambda^2 + 1} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

又因为 $\lambda \in (0, 1)$, 解得 $\lambda = \frac{1}{3}$ 12 分



19. 解: (1) 由题意知, 随机变量 ξ 服从二项分布 $B(6, \frac{1}{2})$.

$$\text{则 } P(\xi=2) = C_6^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{64}.$$

随机变量 ξ 的期望为 $E(\xi) = 6 \times \frac{1}{2} = 3$ 5 分

(2) 记得分为 X , 则 X 的取值可以为 $0, 2, 4, 6, 8, 10, 16, 32$,

当 $X=0$ 时, 结果为黄红黄红黄红或者红黄红黄红黄, 此时 $P(X=0) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

当 $X=2$ 时, 只有 1 个连续两次结果相同, 此时 $P(X=2) = \frac{2}{36} \times 5 \times 2 = \frac{5}{32}$.

当 $X=4$ 时, 有 1 个连续三次或者 2 个连续两次结果相同, 此时 $P(X=4) = \frac{1}{2^6} \times (4 \times 2 + 6 \times 2) = \frac{5}{16}$.

当 $X=6$ 时, 有 1 个连续三次、1 个连续两次或者 3 个连续两次结果相同, 此时 $P(X=6) = \frac{1}{2^6} \times (6 \times 2 + 1 \times 2) = \frac{7}{32}$.



当 $X=8$ 时, 2 个连续三次或者 1 个连续四次结果相同, 此时 $P(X=8) = \frac{1}{2^6} \times (1 \times 2 + 3 \times 2) = \frac{1}{8}$;

当 $X=10$ 时, 1 个连续四次、1 个连续两次结果相同, 此时 $P(X=10) = \frac{1}{2^6} \times (2 \times 2) = \frac{1}{16}$;

当 $X=16$ 时, 1 个连续五次结果相同, 此时 $P(X=16) = \frac{1}{2^6} \times (2 \times 2) = \frac{1}{16}$;

当 $X=32$ 时, 1 个连续六次结果相同, 此时 $P(X=32) = \frac{1}{2^6} \times 2 = \frac{1}{32}$.

所以得分 X 的分布列为

X	0	2	4	6	8	10	16	32
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{32} + 2 \times \frac{5}{32} + 4 \times \frac{5}{16} + 6 \times \frac{7}{32} + 8 \times \frac{1}{8} + 10 \times \frac{1}{16} + 16 \times \frac{1}{16} + 32 \times \frac{1}{32} = 6.5. \dots\dots\dots$$

..... 12 分

20. 解: (1) 因为点 $(1, e)$ 在曲线 $y = f(x)$ 上, 所以 $ea = e$, 所以 $a = 1$. 因为 $f(x) = (x^2 + 2x)e^x - \frac{b}{x}$, 所以 $3e - b = 3e + 1$, 所以 $b = 1$ 5 分

(2) 由 (1) 知 $f(x) = x^2 e^x - \ln x$, 欲证 $f(x) > \frac{5}{2} x^3$, 只需证 $x^2 e^x - \ln x > \frac{5}{2} x^3$,

因为 $x > 0$, 所以只需证 $\frac{e^x}{x} > \frac{\ln x}{x^3} + \frac{5}{2}$, 令 $g(x) = \frac{e^x}{x}$, $h(x) = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{5}{2}$.

因为 $g'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$, 当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, 所以函数 $y = g(x)$

在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x) \geq g(1) = e$.

因为 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^4}$, 所以当 $0 < x < e^{\frac{1}{3}}$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x > e^{\frac{1}{3}}$ 时, $h'(x) < 0$. 所以函数 $y =$

$h(x)$ 在 $(0, e^{\frac{1}{3}})$ 上单调递增, 在 $(e^{\frac{1}{3}}, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $h(x) \leq h(e^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3e} + \frac{5}{2}$. 因为 $\frac{1}{3e} + \frac{5}{2} \approx 2.62 < e \approx 2.72$, 所以 $g(x) > h(x)$, 所以 $f(x) > \frac{5}{2} x^3$ 12 分

21. 解: (1) 点 $M(0, 3)$, 且 $\odot M$ 与 $y=1$ 相切, 所以半径为 2,

所以 $\odot M$ 的方程为 $x^2 + (y-3)^2 = 4$.

由 $S_{\triangle OPQ} = 2$, 可得 $|PQ| = 4$, 则点 $(2, 1)$ 在抛物线上,

代入抛物线方程 $x^2 = 2py$, 得 $p = 2$,

所以抛物线 C 的方程为 $x^2 = 4y$ 5 分



(2) 题设证明可以转化为过点 N 作 $\odot M$ 的两条切线, 分别与抛物线 C 交于异于点 N 的 A, B 两点, 且直线 AB 与 $\odot M$ 相切.

设 $A(x_2, \frac{x_2^2}{4}), B(x_3, \frac{x_3^2}{4})$,

由(1)知 $x_1 \neq \pm 2$, 点 $N(x_1, \frac{x_1^2}{4})$, 且 $x_1 \neq x_2 \neq x_3$,

所以直线 NA 的方程为 $y - \frac{x_2^2}{4} = \frac{\frac{x_1^2}{4} - \frac{x_2^2}{4}}{x_1 - x_2}(x - x_2)$, 即 $(x_1 + x_2)x - 4y - x_1x_2 = 0$.

因为直线 NA 与 $\odot M$ 相切, 所以 $\frac{|-12 - x_1x_2|}{\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + 16}} = 2$, 整理得 $(x_1^2 - 4)x_2^2 + 16x_1x_2 + 80 - 4x_1^2 = 0$.

同理可得 $(x_1^2 - 4)x_3^2 + 16x_1x_3 + 80 - 4x_1^2 = 0$, 所以 x_2, x_3 是关于 x 的方程 $(x_1^2 - 4)x^2 + 16x_1x + 80 - 4x_1^2 = 0$ 的两根,

所以 $x_2 + x_3 = \frac{-16x_1}{x_1^2 - 4}, x_2x_3 = \frac{80 - 4x_1^2}{x_1^2 - 4}$

又因为直线 AB 的方程为 $(x_2 + x_3)x - 4y - x_2x_3 = 0$,

所以 $\odot M$ 的圆心 $M(0, 3)$ 到直线 AB 的距离为 $\frac{|-12 - x_2x_3|}{\sqrt{(x_2 + x_3)^2 + 16}} = \frac{|12 + \frac{80 - 4x_1^2}{x_1^2 - 4}|}{\sqrt{(\frac{-16x_1}{x_1^2 - 4})^2 + 16}} = 2$, 与 $\odot M$

半径相等, 直线 AB 与 $\odot M$ 相切,

故无论点 N 的位置怎么变化, 一定存在 A, B 两点, 使得 $\odot M$ 为 $\triangle ABN$ 的内切圆.

..... 12 分
22. 解: (1) 将 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 代入直角坐标方程, 将曲线 C 的直角坐标方程化为极坐标方程可得 $\rho = 8\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ 5 分

(2) 由题意知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{5}}{5}t \\ y = \frac{2\sqrt{5}}{5}t \end{cases}$ (t 为参数).

将其代入曲线 C 的方程中得 $t^2 - \frac{22\sqrt{5}}{5}t - 7 = 0$.

设 $A(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}t_1, \frac{2\sqrt{5}}{5}t_1), B(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}t_2, \frac{2\sqrt{5}}{5}t_2)$, 则 $t_1 + t_2 = \frac{22\sqrt{5}}{5}, t_1t_2 = -7$

所以 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} = \frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|} = \frac{|t_1 - t_2|}{|t_1t_2|} = \frac{4\sqrt{195}}{35}$ 10 分



23. 解: (1) $f(x) \leq 7$, 即 $|x| + |x-2| \leq 6$, 利用零点分区间法, 对 $f(x)$ 去绝对值,

当 $x < 0$ 时, 由 $-2x+2 \leq 6$, 得 $x \geq -2$, 所以 $x \in [-2, 0)$,

当 $0 \leq x < 2$ 时, $2 \leq 6$ 成立, 所以 $x \in [0, 2)$, 无界学习公众号

当 $x \geq 2$ 时, 由 $2x-2 \leq 6$, 得 $x \leq 4$, 所以 $x \in [2, 4]$.

综上可知, 不等式 $f(x) \leq 7$ 的解集为 $[-2, 4]$ 5 分

(2) 由题意, 可知 $m > 0$.

由(1)得当 $x < 0$ 时, $m \geq 2 + \frac{1}{x}$ 恒成立, 因为 $-2 + \frac{1}{x} < 0$, 所以 $m > 0$ 时不等式恒成立;

当 $x = 0$ 时, $2 \leq 3$ 恒成立, 所以 $m > 0$ 时不等式恒成立;

当 $0 < x < 2$ 时, $m \leq \frac{1}{x}$ 恒成立, 而 $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$, 所以 $0 < m \leq \frac{1}{2}$ 时不等式恒成立;

当 $x \geq 2$ 时, 即 $m \leq 2 - \frac{3}{x}$ 恒成立, 而 $\frac{1}{2} \leq 2 - \frac{3}{x} < 2$,

所以 $0 < m \leq \frac{1}{2}$ 不等式恒成立.

综上, 满足要求的 m 的取值范围为 $(0, \frac{1}{2}]$ 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线