2023年硚口区高三年级起点考高三数学答案

一、选择题： 1. A　2. D　3. B　4. B　5. C　6.A　7. A　8.B

二、选择题： 9. ACD　10.ACD　11. BCD　12. AB

三、填空题： 13. 24　14. 8　15. $\frac{97}{98}$　16. $-1;8\sqrt{2},\sqrt{2}$

四、解答题：

17. (1)设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，因为$a_3=7$，$a_5+a_7=26$，

所以$a_1+2d=7$，$2a_1+10d=26$，（2分）解得$a_1=3$，$d=2$.（3分）因为$a_n=a_1+(n-1)d$，

$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，所以$a_n=2n+1$，（4分），$S_n=n(n+2)$.（5分）

(2)因为$a_n=2n+1$，所以$a_n^2-1=4n(n+1)$.（6分）因此$b_n=\frac{1}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$.

（7分）.故$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=$

$\frac{n}{4(n+1)}$.所以数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n=\frac{n}{4(n+1)}$.（10分）

18. (1)由$\frac{a-c}{b+c}=\frac{\sin B}{\sin A+\sin C}$得$(a-c)(\sin A+\sin C)=(b+c)\sin B$，

由正弦定理得$(a-c)(a+c)=(b+c)b$，（2分）即$a^2-c^2=b^2+bc$，由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得$\cos A=-\frac{1}{2}$.（4分）由于$0<A<\pi$，所以$A=\frac{2\pi}{3}$.（5分）

(2)由(1)可知$A=\frac{2\pi}{3}$，所以$\angle CAD=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$.根据正弦定理，在$\triangle CAD$中，有

$\frac{CD}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{b}{\sin\angle ADC}$，（6分）在$\triangle BAD$中，有$\frac{BD}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{c}{\sin\angle ADB}$，（7分）又$\angle ADB+\angle ADC=\pi$，所以$\sin\angle ADB=\sin\angle ADC$.又$BD=3CD$，所以$b=\frac{2}{3}c$，（8分）所以

由余弦定理可得，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=\frac{4c^2}{9}+c^2-2\times\frac{2c^2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{19}{9}c^2$，（10分）

则$a=\frac{\sqrt{19}}{3}c$，所以$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{7\sqrt{19}}{38}$.（12分）

19. （1）设AD的中点为E，连接PE，因为$\triangle PAD$为等边三角形，所以$PE\perp AD$，又因为平面$PAD\perp$平面$ABCD$，平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，且$PE\subset$平面PAD，所以$PE\perp$平面$ABCD$，因为$AB\subset$平面$ABCD$，所以$PE\perp AB$，（2分）

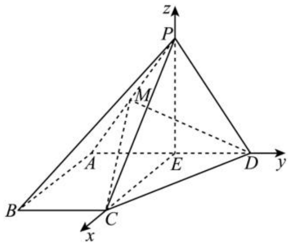
又$PD\perp AB$，$PD\cap PE=P$，$PD,PE\subset$平面PAD，所以$AB\perp$平面PAD，（3分）

又因为$MD\subset$平面PAD，所以$AB\perp MD$，因为在等边三角形$\triangle PAD$中，M为PA的中点，所以$MD\perp AP$，因为$AB\cap AP=A$，$AB,AP\subset$平面PAB，所以$MD\perp$平面PAB，（4分）因为$MD\subset$平面MCD，所以平面$MCD\perp$平面PAB；（5分）

（2）连接 CE，由（1）知，$AB\perp$ 平面 PAD，因为 $AD\subset$ 平面 PAD，所以 $AB\perp AD$，因为 $AD//BC$，$AD=2BC$，$CD=2AB$，所以四边形 $ABCE$ 为矩形，

即 $CE\perp AD$，$BC=AE=DE$，$CD=2AB=2CE$，所以 $\angle CDE=30^\circ$，设 $BC=a$，

$AD=2a$，$PE=AE\cdot\tan 60^\circ=\sqrt{3}a$，$AB=CE=DE\cdot\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$，以 E 为原点，分别以 EC、ED、EP 所在直线为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系，**（6 分）**



所以 $A(0,-a,0)$，$P\left(0,0,\sqrt{3}a\right)$，$C\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{3},0,0\right)$，$B\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{3},-a,0\right)$，$D(0,a,0)$，

$M\left(0,-\dfrac{a}{2},\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\right)$，所以 $\overrightarrow{MC}=\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{3},\dfrac{a}{2},-\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\right)$，$\overrightarrow{MD}=\left(0,\dfrac{3a}{2},-\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\right)$，

$\overrightarrow{PB}=\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{3},-a,-\sqrt{3}a\right)$，$\overrightarrow{PC}=\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{3},0,-\sqrt{3}a\right)$，**（7 分）**设平面 MCD 和平面 PBC 的法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{MC}=\dfrac{\sqrt{3}a}{3}x_1+\dfrac{a}{2}y_1-\dfrac{\sqrt{3}a}{2}z_1=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{MD}=\dfrac{3a}{2}y_1-\dfrac{\sqrt{3}a}{2}z_1=0\end{cases},\quad \begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PB}=\dfrac{\sqrt{3}a}{3}x_2-ay_2-\sqrt{3}az_2=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PC}=\dfrac{\sqrt{3}a}{3}x_2-\sqrt{3}az_2=0\end{cases}$$

，即

$\begin{cases}x_1=\sqrt{3}y_1\\ z_1=\sqrt{3}y_1\end{cases}$，$\begin{cases}y_2=0\\ x_2=3z_2\end{cases}$，取 $y_1=1$，$z_2=1$，则 $\overrightarrow{n_1}=\left(\sqrt{3},1,\sqrt{3}\right)$，**（9 分）** $\overrightarrow{n_2}=(3,0,1)$，

（11 分）所以 $\cos\left\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{10}}=\dfrac{2\sqrt{210}}{35}$，

所以平面 MCD 与平面 PBC 夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{210}}{35}$．**（12 分）**

20.解：（1）从第二个箱子取出黄球的概率 $P_2=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{8}{15}$，**（3 分）**

从第三个箱子取出黄球的概率 $P_3=\dfrac{8}{15}\cdot\dfrac{3}{5}+(1-\dfrac{8}{15})\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{38}{75}$；　**（5 分）**

（2）由题意可知，$P_{i+1}=\dfrac{3}{5}P_i+\dfrac{2}{5}(1-P_i)=\dfrac{1}{5}P_i+\dfrac{2}{5}$，**（8 分）**

$P_{i+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{5}(P_i-\dfrac{1}{2})$，**（9 分）**又 $P_1=\dfrac{2}{3}$，**（10 分）**

$P_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，$\therefore P_i-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\cdot(\frac{1}{5})^{i-1}$，$\therefore P_i=\frac{1}{6\cdot 5^{i-1}}+\frac{1}{2}$，（11 分）

$\therefore P_{20}=\frac{1}{6\cdot 5^{19}}+\frac{1}{2}$.（12 分）

21. 解：(1)由离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$可知$a^2:b^2:c^2=3:1:2$，(1 分)设椭圆方程C：$\frac{y^2}{3b^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$，

将点($\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}$)代入方程，可得$b^2=1$，（3 分）故方程为$\frac{y^2}{3}+x^2=1$.（4 分）

（2）设$l_{AB}:x=ny+2$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，联立方程$\begin{cases}x=ny+2\\y^2+3x^2=3\end{cases}$，代入消元得

$(3n^2+1)y^2+12ny+9=0$，由$\Delta>0$得$n^2-1>0$. $y_1+y_2=-\frac{12n}{3n^2+1}$，

$y_1y_2=\frac{9}{3n^2+1}$，（6 分）原点到l_{AB}的距离$h=\frac{|0-0-2|}{\sqrt{1+n^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+n^2}}$，（7 分）

$|AB|=\sqrt{1+n^2}|y_1-y_2|$，

$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\sqrt{1+n^2}|y_1-y_2|\frac{2}{\sqrt{1+n^2}}=|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\sqrt{(\frac{12n}{3n^2+1})^2-\frac{36}{3n^2+1}}=\sqrt{\frac{36(n^2-1)}{(3n^2+1)^2}}$，（10 分）

令$t=n^2-1>0$，$S_{\Delta AOB}=\sqrt{\frac{36t}{(3t+4)^2}}=\frac{6}{\sqrt{9t+24+\frac{16}{t}}}\le\frac{\sqrt{3}}{2}$，当且仅当$t=\frac{4}{3}$，即$n^2=\frac{1}{3}$时，

面积取到最大值.（12 分）

22. （1）$f(x)=\sin\pi x-3(x-1)\ln(x+1)$，所以$f'(x)=\pi\cos\pi x-3\cdot\frac{x-1}{x+1}-3\ln(x+1)$，

（2 分）所以$f'(0)=\pi+3$，又因为$f(0)=0$，（3 分）

所以$f(x)$在$x=0$处的切线方程为$y=(\pi+3)x$.（4 分）

（2）依题意得$f(x)=m$在$[0,1]$上有两个不等的x_1,x_2，而

$f'(x)=\pi\cos\pi x-3\cdot\frac{x-1}{x+1}-3\ln(x+1)=\pi\cos\pi x-3+\frac{6}{x+1}-3\ln(x+1)$，（5 分）

令$f'(x)=G(x)$，则$G'(x)=-\pi^2\sin\pi x-\frac{6}{(x+1)^2}-\frac{3}{x+1}=-\pi^2\sin\pi x-\frac{3x+9}{(x+1)^2}$，

因为对任意的$x\in[0,1]$，$\sin\pi x>0$，所以任意的$x\in[0,1]$，$G'(x)<0$恒成立，所以$f'(x)=G(x)$，

在$[0,1]$上单调递减，而$f'(0)=\pi+3$，$f'(1)=-\pi-3\ln 2<0$，

由零点存在性定理，存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $f'(x_0)=0$，

于是 $x\in[0,x_0)$， $f'(x_0)>0$， $x\in(x_0,1]$， $f'(x_0)<0$,

因此$f(x)$在$[0,x_0)$上单调递增，在$(x_0,1]$ $(x_0,1]$上单调递减，

在 $x=x_0$ 取到极大值 $f(x)=\sin\pi x_0-3(x_0-1)\ln(x_0+1)>0$，（7 分）

又因为$f(0)=f(1)=0$，由零点存在性定理和$f(x)$的单调性，当且仅当

$0\le m<\sin\pi x_0-3(x_0-1)\ln(x_0+1)$时， $f(x)=m$在$[0,x_0)$上和$(x_0,1]$上各恰有一个零点，

即为x_1,x_2， 不妨设 $x_1<x_2$,

由（1）可得，$f(x)$在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=(\pi+3)x$.

令$h(x)=f(x)-(\pi+3)x$，则,$h'(x)=f'(x)-(\pi+3)=G(x)-(\pi+3)$

令 $H(x)=h'(x)$，则 $H'(x)=G'(x)<0$，所以 $h'(x)=H(x)$ 在$[0,1]$单调递减,

而$h'(0)=f'(0)-(\pi+3)=0$所以对任意的 $x\in[0,1]$， $h'(x)\le0$，所以 $h(x)$ 在$[0,1]$单调递减，又因为$h(0)=f(0)=0$，所以对任意的 $x\in[0,1]$， $h(x)\le0$.

即当 $x\in[0,1]$时， $f(x)\le(\pi+3)x$，（9 分）

同理可计算得，$f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=(\pi+3\ln2)(1-x)$

令 $k(x)=f(x)-(\pi+3\ln2)(1-x)$，则 $k'(x)=f'(x)+(\pi+3\ln2)=G(x)+(\pi+3\ln2)$

令 $K(x)=k'(x)$，则 $K'(x)=G'(x)<0$，所以 $k'(x)=K(x)$ 在$[0,1]$单调递减

而$k'(1)=f'(1)+(\pi+3\ln2)=0$，所以对任意的 $x\in[0,1]$， $k'(x)\ge0$，所以 $k(x)$ 在$[0,1]$单调递增,又因为$k(1)=f(1)=0$，所以对任意的 $x\in[0,1]$， $k(x)\le0$.即当 $x\in[0,1]$时，

$f(x)\le(\pi+3\ln2)(1-x)$，（11 分）考虑$(\pi+3)x=m$和$(\pi+3\ln2)(1-x)=m$的零点，分别为

$x_3=\dfrac{m}{\pi+3}$和 $x_4=1-\dfrac{m}{\pi+3\ln2}$,因为$(\pi+3)x_3=m=f(x_1)\le(\pi+3)x_1$，所以 $x_3\le x_1$，

因为$(\pi+3\ln2)(1-x_4)=m=f(x_2)\le(\pi+3\ln2)(1-x_2)$，所以 $x_4\ge x_2$,

于是 $x_3\le x_1<x_2\le x_4$，所以$|x_1-x_2|\le x_4-x_3=1-\dfrac{m}{\pi+3\ln2}-\dfrac{m}{\pi+3}\le1-\dfrac{2m}{\pi+3}$.（12 分）