中学生标准学术能力诊断性测试 2018 年 12 月测试

理科数学试卷（一卷）

一. 选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	A	D	A	B	A	D	B	C	C	B	D

二. 填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $-\dfrac{1}{2}$

14 . $[1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1]$

15 . $x^2+y^2=a^2$

16 . $[0,2]$

三、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明.证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22,23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：60 分.

17．12 分

解：（Ⅰ）$f(x)=4\sin x\sin(x+\dfrac{\pi}{6})-\sqrt{3}=4\sin x(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x)-\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}\sin^2 x+2\sin x\cos x-\sqrt{3}=\sqrt{3}(1-\cos 2x)+\sin 2x-\sqrt{3}$

$=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$ ……………………………3 分

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π． ……………………………4 分

（Ⅱ）依题意，由正弦定理，$\sin A\sin B+\sin B\cos 2A=\sin B\cos A$． ……………………5 分

因为在三角形中 $\sin B\neq 0$，所以 $\cos 2A=\cos A-\sin A$，

即 $(\cos A-\sin A)(\cos A+\sin A-1)=0$， ……………………………7 分

当 $\cos A-\sin A=0$ 时，$\tan A=1$，$A=\dfrac{\pi}{4}$； ……………………………8 分

当 $\cos A+\sin A=1$ 时，两边平方得 $1+2\sin A\cos A=1$，故 $\sin A\cos A=0$，$\cos A=0$，$A=\dfrac{\pi}{2}$．

由于△ABC 锐角三角形，所以 $A=\dfrac{\pi}{4}$． ……………………………9 分

则 $B+C=\dfrac{3}{4}\pi$. 又 $0<B<\dfrac{\pi}{2}$，$0<C<\dfrac{\pi}{2}$，$C=\dfrac{3}{4}\pi-B$．

所以 $\dfrac{\pi}{4}<B<\dfrac{\pi}{2}$， ……………………………10 分

又$\frac{\pi}{6}<2B-\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$，所以$\frac{1}{2}<\sin(2B-\frac{\pi}{3})\le 1$.

由$f(B)=2\sin(2B-\frac{\pi}{3})$，

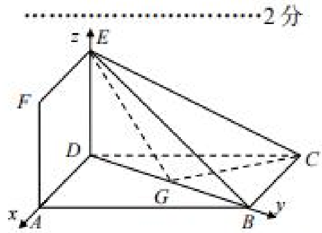
则$f(B)$的取值范围$(1,2]$. ……………………………12分

18．12分

证明：（Ⅰ）∵ $AB=2AD=2a$，$\angle BAD=60°$，

∴在△ABD中，$BD^2=4a^2+a^2-2\cdot 2a\cdot a\cdot\cos 60°=3a^2$，$BD^2+AD^2=AB^2$，

∴ $\angle ADB=90°$，$BD\perp AD$， ……………………………2分



又$ADEF$为正方形，∴ $AD\perp DE$，

又$AD\parallel BC$，∴ $BC\perp DE$，$BC\perp BD$，

又$BD\subset$面BDE，$DE\subset$面BDE，$BD\cap DE=D$，

∴ $BC\perp$平面BDE， ……………………………5分

又$BC\subset$平面BCE，∴平面$BDE\perp$平面BCE. ……………………………6分

（Ⅱ）方法一：平面$ADEF\perp$平面$ABCD$，$ED\perp AD$，∴ $ED\perp$平面$ABCD$，$ED\perp DB$，

即DA、DB、DE两两垂直， ……………………………7分

以DA、DB、DE分别为x,y,z轴，建立如图所示空间直角坐标系，

则$A(a,0,0)$，$G(0,\frac{\sqrt{3}}{2}a,0)$，$C(-a,\sqrt{3}a,0)$，$E(0,0,a)$，

$\overrightarrow{EG}=(0,\frac{\sqrt{3}}{2}a,-a)$，$\overrightarrow{GC}=(-a,\frac{\sqrt{3}}{2}a,0)$， ……………………………8分

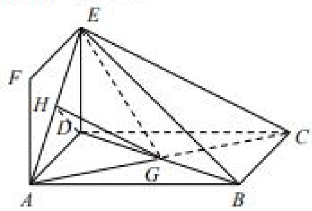
取平面$ADEF$的法向量为$\boldsymbol{m}=(0,1,0)$，设平面CGE的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EG}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{GC}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}ay-az=0\\ -ax+\frac{\sqrt{3}}{2}ay=0\end{cases}$，令$y=1$，则$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$z=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故$\boldsymbol{n}=(\frac{\sqrt{3}}{2},1,\frac{\sqrt{3}}{2})$， ……………………………10分

设平面CGE与平面$ADEF$所成锐二面角为θ，则$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{10}}{5}$. …………12分

方法二：连接AG，AE，则A、G、C共线，AE是平面CGE与平面$ADEF$的交线，



取AE的中点为H，连接HG，HD，

则由平面$ADEF\perp$平面$ABCD$，平面$ADEF\cap$平面$ABCD=AD$，

$BD\perp AD$，且$BD\subset$ 面$ABCD$ ∴ $BD\perp$平面$ADEF$，

即$GD\perp$平面$ADEF$， ……………………………8分

又$ADEF$为正方形，H为AE的中点，∴ $DH\perp AE$，∴ $GH\perp AE$.

∴ $\angle GHD$是平面CGE与平面$ADEF$所成锐二面角的平面角，……………………………10分

由（Ⅰ）可得，$GD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$DH=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，在 Rt△GHD 中，$\cos\angle GHD=\frac{DH}{GH}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

∴平面 CGE 与平面 $ADEF$ 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$. ……………………………12 分

19．12 分

解：（I）抽取的螺帽质量指标值的样本平均数 $\bar{x}$ 和样本方差 s^2 分别为：

$\bar{x}=170\times0.05+180\times0.12+190\times0.18+200\times0.30+210\times0.19$

$+220\times0.10+230\times0.06=200$ ……………………………3 分

$s^2=(-30)^2\times0.05+(-20)^2\times0.12+(-10)^2\times0.18+0\times0.30$

$+10^2\times0.19+20^2\times0.10+30^2\times0.06=224$， ………………6 分

（II）（i）由（I）知，$Z\sim N(200,224)$，从而

$P(200-14.97<Z<200+14.97)=2P(185.03<Z\le200)=0.6826$，

$P(185.03<Z\le200)=0.3413$，

$P(200-29.94<Z<200+29.94)=2P(200\le Z<229.94)=0.9544$，

$P(200\le Z<229.94)=0.4772$，

$P(185.03<Z<229.94)=P(185.03<Z\le200)+P(200\le Z<229.94)=0.8185$，………10 分

（ii）由（i）知，一件螺帽的质量指标值位于区间 $(185.03, 229.94)$ 的概率为 0.8185，

依题意知 $X\sim B(100,0.8185)$，所以 $E(X)=100\times0.8185=81.85$. ………………………12 分

20．12 分

解 （Ⅰ）由 $A(\frac{p}{2},0)$，则 $B(\frac{p}{2}+a,0)$，$D(\frac{p}{2},p)$，则 $C(\frac{p}{2}+a,\sqrt{p^2+2pa})$，…………2 分

又 $a=p$，所以 $k_{CD}=\frac{\sqrt{3}p-p}{\frac{3p}{2}-\frac{p}{2}}=\sqrt{3}-1$. ……………………4 分

（Ⅱ）设直线 CD 的方程为：$y=kx+b\ (k\ne0)$，设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=kx+b\\y^2=2px\end{cases}$，得 $ky^2-2py+2pb=0$， …………………………5 分

所以 $\Delta=4p^2-8pkb>0$，得 $kb<\frac{p}{2}$， ………………………6 分

又 $y_1+y_2=\frac{2p}{k}$，$y_1y_2=\frac{2pb}{k}$，由 $y_1+y_2=\frac{2p}{k}>0$，$y_1y_2=\frac{2pb}{k}>0$，可知 $k>0$，$b>0$，

由 $|CD|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=a\sqrt{1+k^2}$， ……………………7 分

点O到直线CD的距离为$d=\dfrac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}$， 所以$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot a\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{1}{2}ab$．………8 分

又$S_2=\dfrac{1}{2}(y_1+y_2)\cdot|x_1-x_2|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2p}{k}\cdot a=\dfrac{ap}{k}$， ………………………10 分

所以$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{kb}{2p}$， ………………………11 分

因为$0<kb<\dfrac{p}{2}$，所以$0<\dfrac{S_1}{S_2}<\dfrac{1}{4}$． ………………………12 分

21．12 分

解 （I）当$a>0$时，$f'(x)=a\cdot e^x+(ax+1)e^x=(ax+a+1)e^x$， ………………………1 分

由$f'(x)>0$，得$x>-\dfrac{a+1}{a}$，

$\therefore f(x)$在$(-\infty,-\dfrac{a+1}{a})$上单调递减，在$(-\dfrac{a+1}{a},+\infty)$上单调递增． ……………………2 分

$\therefore x=-\dfrac{a+1}{a}$时，$f(x)$取得极小值，即最小值$-a\cdot e^{-\frac{a+1}{a}}$． ………………………3 分

当$a>0$时，$\dfrac{a+1}{a}=1+\dfrac{1}{a}>1$，$-\dfrac{a+1}{a}<-1$，

$\because 0<e^{-\frac{a+1}{a}}<\dfrac{1}{e}$，$\therefore -a\cdot e^{-\frac{a+1}{a}}>-\dfrac{a}{e}$，即$f(x)+\dfrac{a}{e}>0$． ………………………………5 分

（II）证明：当$a=-\dfrac{1}{2}$时，$f(x)=(-\dfrac{1}{2}x+1)e^x$，

则$f'(x)=\dfrac{1}{2}(1-x)e^x$，$\therefore x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，$x\in(-\infty,1)$时，$f'(x)>0$，

$f(x)$单调递增， …………6 分

令$F(x)=f(x)-f(2-x)$，则$F(x)=(-\dfrac{1}{2}x+1)e^x-\dfrac{1}{2}xe^{2-x}$，

$\therefore F'(x)=\dfrac{1}{2}(1-x)(e^x-e^{2-x})$，

当$x\in(1,+\infty)$时，$1-x<0$，$x>2-x$，$e^x-e^{2-x}>0$，$\therefore F'(x)<0$，$F(x)$单调递减， ……………………8 分

$\therefore F(x)<F(1)=f(1)-f(1)=0$，即$f(x)-f(2-x)<0$，

$\therefore$当$x\in(1,+\infty)$时，$f(x)<f(2-x)$． ………………………9 分

又$f(x)$在$(-\infty,1)$内是增函数，在$(1,+\infty)$内是减函数．$x_1\neq x_2$，且$f(x_1)=f(x_2)$，$\therefore x_1,x_2$不在同一单调区间内，

不妨设 $x_1<1<x_2$，由上可知：$f(x_2)<f(2-x_2)$， ························10 分

$\because f(x_1)=f(x_2)$，$\therefore f(x_1)<f(2-x_2)$.

$\because x_1<1$，$2-x_2<1$，又 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内是增函数，

$\therefore x_1<2-x_2$，即 $x_1+x_2<2$. ························12 分

（如果考生证明过程与参考答案不完全一致，但思路正确，逻辑严密，阅题老师可酌情给分）

22．10 分

解：（I）由 $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$，得到曲线 C 的普通方程是：$\dfrac{2x^2}{5}+y^2=1$， ············2 分

又 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，代入得，$5\rho^2\sin^2\theta+2\rho^2\cos^2\theta=5$，即 $\rho^2=\dfrac{5}{3\sin^2\theta+2}$

（$\rho^2=\dfrac{5}{5\sin^2\theta+2\cos^2\theta}$ 也可得分）. ···························5 分

（II）因为 $\rho^2=\dfrac{5}{5\sin^2\theta+2\cos^2\theta}$，所以 $\dfrac{1}{\rho^2}=\sin^2\theta+\dfrac{2\cos^2\theta}{5}$， ···························6 分

由 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，故 $OP\perp OQ$，

设点 P 的极坐标为 (ρ_1,θ)，则点 Q 的极坐标可设为 $(\rho_2,\theta\pm\dfrac{\pi}{2})$， ···························7 分

所以 $\dfrac{|\overrightarrow{OP}|^2\cdot|\overrightarrow{OQ}|^2}{|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{|OP|^2}+\dfrac{1}{|OQ|^2}}$

$=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\rho_1^2}+\dfrac{1}{\rho_2^2}}=\dfrac{1}{\sin^2\theta+\dfrac{2\cos^2\theta}{5}+\cos^2\theta+\dfrac{2\sin^2\theta}{5}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{5}}=\dfrac{5}{7}$. ························10 分

23．10 分

解：（I）当 $a=1$ 时，由 $f(x)\ge 0$，即 $|x+2|\ge|2x-1|$，两边平方，得：

$x^2+4x+4\ge 4x^2-4x+1$，

即 $3x^2-8x-3\le 0$， ···························2 分

解得：$-\dfrac{1}{3}\le x\le 3$，

所以不等式 $f(x)\ge 0$ 的解集为：$\{x|-\dfrac{1}{3}\le x\le 3\}$. ···························4 分

（II）若存在 $x\in\mathbf{R}$，使得不等式 $f(x)>a$ 成立，即 $|x+2|-a|2x-1|>a$ 成立，

所以存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $a<\dfrac{|x+2|}{|2x-1|+1}$ 成立，令 $g(x)=\dfrac{|x+2|}{|2x-1|+1}$，只需 $a<g_{\max}(x)$ 即可.

又函数 $g(x)=\dfrac{|x+2|}{|2x-1|+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2(x-1)},x<-2\\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2(x-1)},-2\le x\le\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x},x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$, ……………………6 分

当 $x<-2$ 时，$g(x)$ 单调递减，$0<g(x)<\dfrac{1}{2}$；

当 $-2\le x\le\dfrac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 单调递增，$0\le g(x)\le\dfrac{5}{2}$；

当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 单调递减，$\dfrac{1}{2}<g(x)<\dfrac{5}{2}$；

可知函数 $g_{\max}(x)=g(\dfrac{1}{2})=\dfrac{5}{2}$， ……………………9 分

所以 $a<\dfrac{5}{2}$. ……………………10 分