兰州一中 2022-2023-2 学期期末考试试题

高二数学

说明：本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，满分 150 分，考试时间 120 分钟. 答案写在答题卡上，交卷时只交答题卡.

第Ⅰ卷（选择题共 60 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A=\{x\mid(2a-x)(x-a)<0\}$，若 $2\notin A$，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$[1,2]$　　B．$[1,2)$　　C．$(1,2)$　　D．$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

2.已知矩形 $ABCD$，P 为平面 $ABCD$ 外一点，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，点 M，N 满足 $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$，$\overrightarrow{PN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PD}$．若 $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AP}$，则 $x+y+z=$（　　）

A．-1　　B．1　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

3.从 $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 中依次不放回地取 2 个数，事件 A 为“第一次取到的是偶数”，事件 B 为“第二次取到的是 3 的整数倍”，则 $P\left(B|\ A\right)$ 等于（　　）

A．$\frac{3}{8}$　　B．$\frac{11}{32}$　　C．$\frac{11}{45}$　　D．$\frac{3}{4}$

4.已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 在棱 DD_1 上，直线 $AC_1\perp$ 平面 A_1BM，则点 M 的位置是（　　）

A．点 D　　B．点 D_1　　C．DD_1 的中点　　D．不存在

5.给出定义：设 $f''(x)$ 是函数 $y=f'(x)$ 的导函数，若方程 $f''(x_0)=0$ 有实数解，则称点（x_0，f（x_0））为函数 $y=f$（x）的“拐点”．已知函数 $f(x)=3x+4\sin x-\cos x$ 的拐点为 M（x_0，f（x_0）），则下列结论正确的为（　　）

A．$\tan x_0=4$　　B．点 M 在直线 $y=3x$ 上

C．$\sin 2x_0=\frac{4}{17}$　　D．点 M 在直线 $y=4x$ 上

6.正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，则平面 AB_1D_1 与平面 BDC_1 的距离为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

7.抛一枚硬币，若抛到正面则停止，抛到反面则继续抛，已知该硬币抛到正反两面是等可能的，则以上

操作硬币反面朝上的次数期望为（　　）

A．$\frac{3}{4}$　　B．$\frac{9}{8}$　　C．1　　D．$\frac{5}{4}$

8.已知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，$f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$\sin 2x-f'(x)>0$，且∀x∈**R**，$f(-x)+f(x)-2\sin^2 x=0$，则下列说法一定正确的是（　　）

A．$f(\frac{\pi}{3})-f(\frac{\pi}{6})>\frac{1}{2}$　　B．$f(\frac{\pi}{3})-f(\frac{\pi}{4})<\frac{1}{4}$

C．$f(\frac{\pi}{3})-f(\frac{3\pi}{4})<\frac{1}{4}$　　D．$f(\frac{\pi}{3})-f(-\frac{3\pi}{4})>\frac{1}{4}$

二、选择题 本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9.下列四个条件中，能成为 $x>y$ 的充分不必要条件的是（　　）

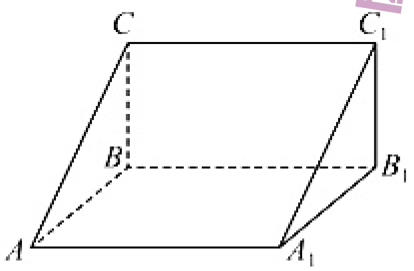
A．$xc^2>yc^2$　　B．$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}<0$　　C．$|x|>|y|$　　D．$\ln x>\ln y$

10.甲罐中有 5 个红球，2 个白球和 3 个黑球，乙罐中有 4 个红球，3 个白球和 3 个黑球．先从甲罐中随机取出一球放入乙罐，分别以 A_1，A_2 和 A_3 表示由甲罐取出的球是红球，白球和黑球的事件；再从乙罐中随机取出一球，以 B 表示由乙罐取出的球是红球的事件，则下列结论中正确的是（　）

A．$P(B)=\frac{2}{5}$　　B．$P(B|A_1)=\frac{5}{11}$

C．事件 B 与事件 A_1 相互独立　　D．A_1，A_2，A_3 是两两互斥的事件

11.我国古代数学名著《九章算术》中将“底面为直角三角形且侧棱垂直于底面的三棱柱”称为“堑堵”．现有一如图所示的“堑堵”$ABC-A_1B_1C_1$，其中 $AB\perp BC$，若 $BB_1=AB=2$，$BC=1$，则（　　）



A．该“堑堵”的体积为 2

B．该“堑堵”外接球的表面积为 9π

C．若点 P 在该“堑堵”上运动，则 $|PA|$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$

D．该“堑堵”上，AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成角的正切值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

12.已知函数 $f(x)=\dfrac{\sin^2 2x+a}{\sin^2 x}(a\neq 0)$，则（　　）

A．f（x）的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$

B．f（x）的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

C．a＞0 时，f（x）在区间 $(-\dfrac{\pi}{2},0)$ 单调递增

D．a＜0 时，f（x）在区间 $(0,\pi)$ 既有极大值点也有极小值点

第II卷（非选择题 共 90 分）

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.已知 $a>0,b>0$，若 $2a+b=4$，则 ab 的最大值为________.

14.拉格朗日中值定理是微分学的基本定理之一，内容为：如果函数 f（x）在闭区间[a，b]上的图象连续不间断，在开区间（a，b）内的导数为 $f'(x)$，那么在区间（a，b）内至少存在一点 c，使得 $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ 成立，其中 c 叫做 f（x）在[a，b]上的“拉格朗日中值点”．根据这个定理，可得函数 $f(x)=\ln x$ 在[1，e]上的“拉格朗日中值点”为 _______.

15.矩形 $ABCD$ 中，$\angle BCA=30^0$，$AC=20$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PA=5$，则 P 到 BC 的距离为__________.

16.已知 $a\in(0,1)$，$f(x)=a^x+(1+a)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，则 a 的取值范围是______.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分 10 分）

某足球队为评估球员的场上作用，对球员进行数据分析．球员甲在场上出任边锋、前卫、中场三个位置，根据过往多场比赛，其出场率与出场时球队的胜率如下表所示．

场上位置	边锋	前卫	中场
出场率	0.5	0.3	0.2
球队胜率	0.6	0.8	0.7

(1)当甲出场比赛时，求球队获胜的概率；

(2)当甲出场比赛时，在球队获胜的条件下，求球员甲担当前卫的概率.

18.（本题满分 12 分）

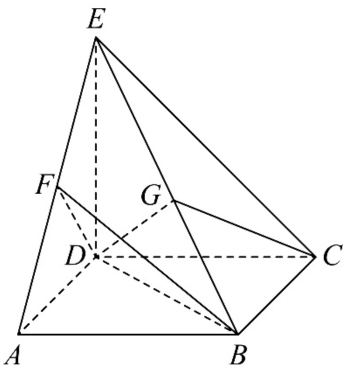
已已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}+ax-\mathrm{e}$，$a\in\mathrm{R}$（注：$\mathrm{e}=2.718281\cdots$是自然对数的底数）.

(1)当 $a=1$时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程；

(2)若 $f(x)$ 只有一个极值点，求实数 a 的取值范围.

19.（本题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $E-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$ED\perp$平面 $ABCD$，$ED=DC$，F 为 AE 的中点，G 为 BE 上一点.



(1)求证：$CE//$平面 DFB；

(2)若 $BD\perp$平面 AGC，求二面角 $G-DC-B$ 的度数.

20.（本题满分 12 分）

MCN 即多频道网络，是一种新的网红经济运行模式，这种模式将不同类型和内容的 PGC（专业生产内容）联合起来，在资本有力支持下，保障内容的持续输出，从而最终实现商业的稳定变现，在中国以直播电商、短视频为代表的新兴网红经济的崛起，使 MCN 机构的服务需求持续增长．数据显示，近年来中国 MCN 市场规模迅速扩大．下表为 2018 年—2022 年中国 MCN 市场规模（单位：百亿元），其中 2018 年—2022 年对应的代码依次为 1-5．

年份代码 x	1	2	3	4	5
中国 MCN 市场规模 y	1.12	1.68	2.45	3.35	4.32

(1)由上表数据可知，可用指数函数模型 $y=a\cdot b^x$ 拟合 y 与 x 的关系，请建立 y 关于 x 的回归方程；

(2)从 2018 年-2022 年中国 MCN 市场规模中随机抽取 3 个数据，记这 3 个数据中与 $\overline{y}$ 的差的绝对值小于 1 的个数为 X，求 X 的分布列与期望．

参考数据：

$\overline{y}$	$\overline{v}$	$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i$	$\sum_{i=1}^{5}x_iv_i$
2.58	0.84	46.83	15.99

其中 $v_i=\ln y_i$，$\overline{y}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}y_i$，$\overline{v}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}v_i$．

参考公式：对于一组数据 (u_1,v_1)，(u_2,v_2)，…，(u_n,v_n)，其回归直线 $\hat{v}=\hat{a}+\hat{\beta}u$ 的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{\beta}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}u_iv_i-n\overline{u}\overline{v}}{\sum_{i=1}^{n}u_i^2-n\overline{u}^2}$，$\hat{a}=\overline{v}-\hat{\beta}\overline{u}$．

21. (本题满分 12 分）

如图 1 所示，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2\sqrt{2}$，$BC=2$，M 为 CD 中点，将△DAM 沿 AM 折起，使点 D 到点 P 处，且平面 PAM⊥平面 $ABCM$，如图 2 所示.

（1）求证：$PB\perp AM$;

（2）在棱 PB 上取点 N，使平面 AMN⊥平面 PAB，求直线 AB 与平面 AMN 所成角的正弦值.

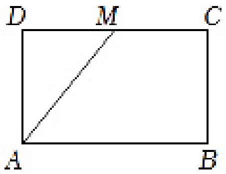


图1

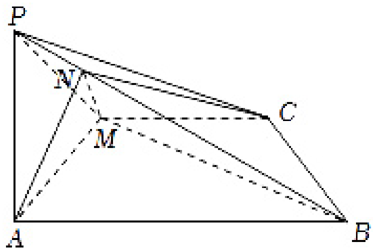


图2

22. (本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x-a\ln x\ (a\in \mathrm{R})$.

(1)当 $a<\mathrm{e}$ 时，讨论函数 $f(x)$ 零点的个数;

(2)当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f\left(x\right)\geq ax^{a}\ln x-x\mathrm{e}^{x}$ 恒成立，求 a 的取值范围.