数学参考答案(文科)

1. B 【解析】本题考查集合的运算,考查数学运算的核心素养.

$A=(-\infty,3)$,$B=(-\infty,-1)$,则 $A\cap B=(-\infty,-1)$.

2. B 【解析】本题考查复数的运算,考查数学运算的核心素养.

因为 $iz=1-2i$,所以 $z=\frac{1-2i}{i}=-2-i$.

3. D 【解析】本题考查三角函数,考查直观想象的核心素养.

$f(x)=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos x$,则 $f(x)$ 的最小正周期 $T=2\pi$.

4. C 【解析】本题考查统计相关知识,考查数据分析的核心素养.

估计该校学生的平均达标率为 $\frac{40\times60\%+30\times40\%+30\times40\%}{100}\times100\%=48\%$.

5. B 【解析】本题考查线性规划,考查数形结合的数学思想.

画出可行域(图略)知,当 $l: z=2x+y-1$ 平移到过点 $(2,3)$ 时,z 取得最大值,且最大值为 6.

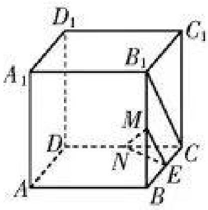
6. C 【解析】本题考查古典概型,考查逻辑推理的核心素养.

这 5 个数中 1,3,5 为奇数,从这 5 个数中随机选出 2 个数共有 10 种情况,其中都是奇数的有 3 种情况,则所求的概率为 0.3.

7. C 【解析】本题考查极值,考查数学运算的核心素养.

$f'(x)=3x^2+a$,所以 $f'(1)=3+a=0$,则 $a=-3$,所以 $f(1)=-2$.

8. D 【解析】本题考查异面直线所成的角,考查空间想象能力.



取 BC 的中点 E,连接 ME,NE,易知 $ME//B_1C$,所以 $\angle NME$ 或其补角为异面直线 MN 和 B_1C 所成的角. 设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2,则 $ME=\sqrt{2}$,$NE=\sqrt{2}$,$MN=\sqrt{6}$,所以 $|\cos\angle NME|=|\frac{2+6-2}{2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. B 【解析】本题考查比较大小,考查逻辑推理的核心素养.

由题意知,$a=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}>\frac{1}{2}$,$b=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$,$c=\log_5 2<\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$,故 $c<b<a$.

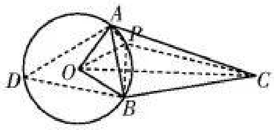
10. A 【解析】本题考查圆锥的外接球,考查直观想象的核心素养.

设球 O 的半径为 R,则 $4\pi R^2=16\pi$,解得 $R=2$. 设圆锥底面圆的半径为 r,则 $r=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$,圆锥的高为 3,圆锥的母线长为 $2\sqrt{3}$,所以该圆锥的侧面积为 $\pi\times\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=6\pi$.

11. D 【解析】本题考查函数的零点以及导数的应用,考查数形结合的数学思想.

令 $f(x)=0$,可得 $|\ln x|=k(x-1)$,当 $k>0$ 且 $y=\ln x$ 和 $y=k(x-1)$ 在 $x=1$ 处相切时,$k=1$,当 $k<0$ 且 $y=-\ln x$ 和 $y=k(x-1)$ 在 $x=1$ 处相切时,$k=-1$,结合 $y=|\ln x|$ 和 $y=k(x-1)$ 的图象(图略),可知当函数 $f(x)=|\ln x|-k(x-1)$ 恰有两个零点时,k 的取值范围为 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$.来源:高三答案公众号

12. B 【解析】本题考查解三角形的实际应用,考查逻辑推理的核心素养.



如图,因为 $\angle APB=\frac{2\pi}{3}$,所以 P 在如图所示的圆 O 上,

圆 O 的半径为 $\frac{1}{2}\times\frac{10\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=10$,

由圆周角的性质可得 $\angle ADB=\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$,$\angle AOB=\frac{\pi}{3}\times2=\frac{2\pi}{3}$,$\angle OBA=\angle OAB=\frac{\pi}{6}$,

连接 OC,可得 $OP+CP>OC$,所以当 P 为 OC 与圆的交点时,CP 取最小值,即 $CP=OC-OP$,又 $OB=OP=10$,在 $\triangle OBC$ 中,$OB=10$,$BC=40$,$\angle OBC=\frac{2\pi}{3}$,根据余弦定理可知 $OC=\sqrt{10^2+40^2-2\times10\times40\times(-\frac{1}{2})}=10\sqrt{21}$,所以 CP 的最小值为 $(10\sqrt{21}-10)$m.

13. -2 【解析】本题考查平面向量,考查数学运算的核心素养.

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times(-1)+(-2)\times0=-2$.

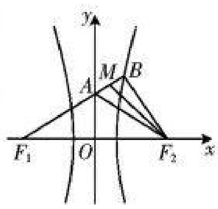
14. $(2,0)$ 【解析】本题考查抛物线,考查直观想象的核心素养.

因为 $2p=2+6$,所以 $p=4$,则所求焦点坐标为 $(2,0)$.

15. $-\frac{\pi}{6}$ 【解析】本题考查三角恒等变换,考查数学运算的核心素养.

因为 $f(x)=\sin(4x+\varphi)(-\frac{\pi}{2}<\varphi<0)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{24},0)$ 对称,所以 $\frac{\pi}{6}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

16. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ 【解析】本题考查双曲线,考查直观想象的核心素养.



如图,由题可知 $|AF_1|=|AF_2|=|BF_2|$,又因为 $|BF_1|-|BF_2|=2a$,所以 $|AB|=2a$,因为直线 l 的斜率为 $\frac{1}{2}$,所以 $|AO|=\frac{c}{2}$,$|AF_1|=\frac{\sqrt{5}c}{2}$,设 M 为 AB 的中点,连接 MF_2,易知 $\triangle AOF_1\approx\triangle F_2MF_1$,所以 $\frac{|F_1F_2|}{|AF_1|}=\frac{|F_1M|}{|F_1O|}$,

则 $\frac{2c}{\frac{\sqrt{5}c}{2}}=\frac{a+\frac{\sqrt{5}}{2}c}{c}$,解得 $a=\frac{3\sqrt{5}}{10}c$,所以双曲线 C 的离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

17. 解：(1)由所给数据，可得 2×2 列联表为

	近视	未近视	合计
小学生	80	100	180
中学生	120	100	220
合计	200	200	400

………………………………………………………………………… 6 分

(2)根据 2×2 列联表中的数据可得

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{400\times(80\times100-120\times100)^2}{180\times220\times200\times200}\approx4.04<6.635$， 10 分

根据临界值表可知，没有 99% 的把握认为该地区的学生是否近视与学生的年级有关. ……
………………………………………………………………………… 12 分

18. 解：(1)由题可知，等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=\dfrac{a_3+a_2}{a_2+a_1}=2$. …………………… 2 分

又 $a_1+a_2=6$，所以 $a_1+2a_1=6$，解得 $a_1=3$. …………………… 4 分

所以 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2^n$. …………………………………… 6 分

(2) $S_n=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$. …………………………………… 9 分

令 $S_n\leqslant14$，解得 $n\leqslant3$，所以使得 $S_n\leqslant14$ 成立的正整数 n 的最大值为 3. ……………… 12 分

19. (1)证明：因为 $\angle BDC=60^\circ$，$BD=2CD=2$，所以由余弦定理可得 $BC=\sqrt{3}$，……………… 1 分

所以 $BD^2=CD^2+BC^2$，则 $BC\perp CD$. …………………………………… 2 分

因为平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，且相交于 CD，所以 $BC\perp$ 平面 PCD. ……………… 4 分

因为 $PD\subset$ 平面 PCD，所以 $BC\perp PD$. …………………………………… 6 分

(2)解：因为 $PC\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $V_{P-ABD}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=1$，……………… 8 分

在 $\triangle PBD$ 中，$PD=2$，$BD=2$，$PB=\sqrt{6}$，$S_{\triangle PBD}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2^2-(\dfrac{\sqrt{6}}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，…… 10 分

设点 A 到平面 PBD 的距离为 h，所以 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{15}}{2}h=1$，解得 $h=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$，即点 A 到平面 PBD 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$. …………………………………… 12 分

20. 解：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{(x-a)(x-2a)}{x}$. …………………… 1 分

若 $a>0$，当 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(a,2a)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(2a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. …………………… 4 分

若 $a<0$，则 $f'(x)>0$ 恒成立，$f(x)$ 单调递增.

综上，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,a)$，$(2a,+\infty)$，单调递减区间为 $(a,2a)$；

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调递减区间. ………………………… 6 分

(2)因为 $f(x)$ 有 3 个零点，所以 $a>0$， ………………………… 8 分

则 $f(a)>0$，$f(2a)<0$， ………………………… 10 分

解得 $e^{\frac{5}{4}}<a<\frac{e^2}{2}$，即 a 的取值范围为 $(e^{\frac{5}{4}},\frac{e^2}{2})$. ………………………… 12 分

21. 解：(1)由 $|FM|=3|FN|$，可得 $a+c=3(a-c)$，解得 $a=2c$， ………………………… 1 分

又因为 $a^2=b^2+c^2$，所以 $b=\sqrt{3}c$， ………………………… 2 分

因为点 $P(1,\frac{3}{2})$ 在椭圆 E 上，所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{\frac{9}{4}}{b^2}=1$， ………………………… 3 分

解得 $a=2$，$b=\sqrt{3}$，$c=1$，所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………… 4 分

(2)当直线 l 不与 x 轴重合时，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 l 的方程为 $x=my+1$，

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ x=my+1,\end{cases}$ 整理得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，

则 $y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$. ………………………… 5 分

故 $|AB|=\sqrt{(1+m^2)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}=\sqrt{(1+m^2)[(\frac{-6m}{3m^2+4})^2+\frac{36}{3m^2+4}]}=12\times\frac{m^2+1}{3m^2+4}$， ………………………… 7 分

圆心 O 到直线 l 的距离为 $\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$，则 $\frac{|CD|^2}{4}=4-\frac{1}{m^2+1}$， ………………………… 9 分

所以 $\frac{\lambda}{|AB|}+\frac{|CD|^2}{4}=\frac{\lambda}{12}\times\frac{3m^2+4}{m^2+1}+4-\frac{1}{m^2+1}=\frac{\lambda}{12}\times(3+\frac{1}{m^2+1})+4-\frac{1}{m^2+1}=\frac{\lambda}{4}+4+\frac{\frac{\lambda}{12}-1}{m^2+1}$，当 $\lambda=12$ 时，$\frac{12}{|AB|}+\frac{|CD|^2}{4}$ 为定值 7. ………………………… 11 分

当 l 与 x 轴重合时，$|AB|=|CD|=4$，所以 $\frac{12}{|AB|}+\frac{|CD|^2}{4}=7$，所以当 $\lambda=12$ 时，$\frac{\lambda}{|AB|}+\frac{|CD|^2}{4}$ 为常数. ………………………… 12 分

22. 解：(1)圆 M 的普通方程为 $(x-3)^2+y^2=2$，展开得 $x^2+y^2-6x+7=0$. ………………………… 2 分

由 $\begin{cases}x^2+y^2=\rho^2,\\ x=\rho\cos\theta,\end{cases}$ 得圆 M 的极坐标方程为 $\rho^2-6\rho\cos\theta+7=0$. ………………………… 4 分

(2)把 $\theta=\alpha$ 代入 $\rho^2-6\rho\cos\theta+7=0$，得 $\rho^2-6\rho\cos\alpha+7=0$，

则 $|OA|$，$|OB|$ 是 $\rho^2-6\rho\cos\alpha+7=0$ 的两个根，

所以 $|OA|+|OB|=6\cos\alpha$，$|OA||OB|=7$，…………………………………… 6 分

则 $\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}=\frac{|OA|+|OB|}{|OA||OB|}=\frac{6\cos\alpha}{7}=\frac{4\sqrt{2}}{7}$，解得 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，……………………… 8 分

所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{1}{3}$，

所以 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$，即直线 AB 的直角坐标方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{4}x$. ……………………………… 10 分

23. 解：(1)因为 $f(x)<3+|2x+2|$，所以 $|2x-1|-|2x+2|<3+|2x+2|$，即 $|2x-1|<3$，……………………………………………………………………………… 2 分

所以 $-3<2x-1<3$，则 $-1<x<2$，所以不等式的解集为 $(-1,2)$. …………………… 4 分

(2)由 $|2x-1|+|2x+2|\geqslant|2x-1-(2x+2)|=3$，得 $M=3$. …………………………… 6 分

则 $a^2+2b^2=3$，

由柯西不等式可知 $(a^2+2b^2)(4+\frac{1}{2})\geqslant(2a+b)^2$，…………………………………… 8 分

则 $3\times\frac{9}{2}\geqslant(2a+b)^2$，解得 $2a+b\leqslant\frac{3\sqrt{6}}{2}$，当且仅当 $a=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$b=\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时，等号成立，

所以 $2a+b$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$. ……………………………………………