2022 学年第二学期杭州市高三年级教学质量检测

参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8
C	A	A	B	D	C	D	B

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．CD　　10．BD　　11．ACD　　12．AD

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．70　　14．0　　15．2　　16．$-\ln 2$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．

17．（1）因为 $\sin\frac{A+C}{2}=\sin\frac{\pi-B}{2}=\cos\frac{B}{2}$，

所以 $\cos B+\cos\frac{B}{2}=0$，即 $2\cos^2\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}-1=0$，

解得 $\cos\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$或 $\cos\frac{B}{2}=-1$，

因为 $0<B<\pi$，所以 $0<\frac{B}{2}<\frac{\pi}{2}$，则 $\cos\frac{B}{2}>0$，故 $\cos\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$，

则 $\frac{B}{2}=\frac{\pi}{3}$，故 $B=\frac{2\pi}{3}$．　　………………5 分

（2）令 $c=5m$（$m>0$），则 $a=3m$，

由三角形面积公式，得 $\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}b\times\frac{15\sqrt{3}}{14}$，

所以 $b=7m^2$，

由余弦定理可，得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

则 $49m^4=49m^2$，解得 $m=1$，

从而 $a=3$，$b=7$，$c=5$，

故△ABC 的周长为 $a+b+c=15$．　　………………5 分

18．（1）由题意，知 $\begin{cases}5a_1+10d=20,\\(a_1+2d)^2=(a_1+d)(a_1+4d)\end{cases}$，解得 $a_1=0$，$d=2$．

所以 $a_n=2n-2$．　　………………4 分

（2）因为 $b_n+b_{n+1}=2^{n-1}$　　①

所以 $b_1+b_2=1$，又因为 $b_1=1$，所以 $b_2=0$．

当 $n\geq 2$ 时，$b_{n-1}+b_n=2^{n-2}$　　②

①－②，得 $b_{n+1}-b_{n-1}=2^{n-2}$，即 $b_n-b_{n-2}=2^{n-3}$（$n\geq 3$）．

所以 $b_{2n}-b_{2n-2}=2^{2n-3}$，$b_{2n-2}-b_{2n-4}=2^{2n-5}$，……，$b_4-b_2=2^1$，

累加，得 $b_{2n}-b_2=\frac{2}{3}(4^{n-1}-1)$（$n\geq 2$），

所以 $b_{2n}=\frac{2}{3}(4^{n-1}-1)$　（$n\geq 1$），

所以数列$\{b_{2n}\}$的前 n 和为 $b_2+b_4+\ldots+b_{2n}=\frac{2}{9}\cdot 4^n-\frac{2n}{3}-\frac{2}{9}$．　………………8 分

19．（1）证明：设 AC 的中点为 E，连结 SE，BE，

因为 $AB=BC$，所以 $BE\perp AC$，

在$\triangle SCB$ 和$\triangle SAB$ 中，$\angle SAB=\angle SCB=90°$，$AB=BC$．

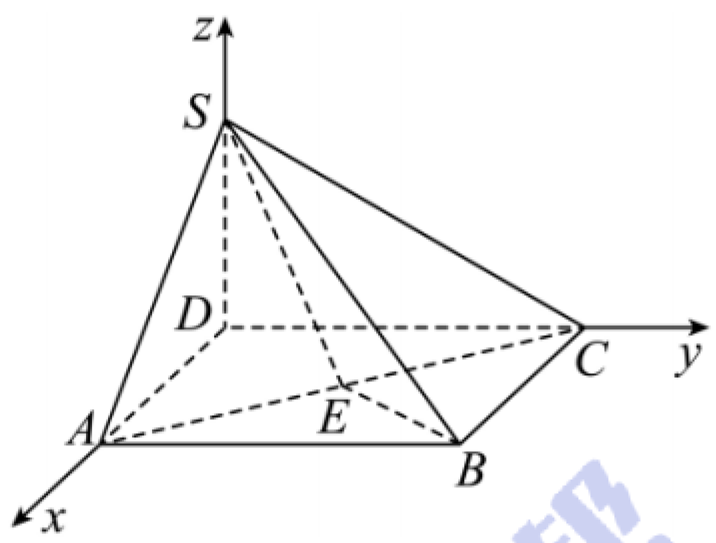
所以 $\triangle SCB\cong\triangle SAB$，所以 $SA=SC$．

所以 $SE\perp AC$，

所以 $AC\perp$ 平面 SBE，

因为 $SB\subset$平面 SBE，

所以 $AC\perp SB$．　　　　………………5 分



（2）过 S 作 $SD\perp$平面 ABC，垂足为 D，连接 AD，CD，

所以 $SD\perp AB$，

因为 $AB\perp SA$，所以 $AB\perp$平面 SAD，

所以 $AB\perp AD$，同理，$BC\perp CD$．

所以四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形．

建立如图所示的空间直角坐标系 $D\text{—}xyz$，则

$A(2，0，0)$，$B(2，2，0)$，$C(0，2，0)$，$S(0，0，2)$，

所以$\overrightarrow{SC}=(0，2，-2)$，$\overrightarrow{AC}=(-2，2，0)$，$\overrightarrow{BC}=(-2，0，0)$，

设平面 SAC 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x_1，y_1，z_1)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{SC}=2y_1-2z_1=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AC}=-2x_1+2y_1=0\end{cases}$，取 $x_1=1$，$y_1=1$，$z_1=1$，

所以 $\boldsymbol{n}_1=(1，1，1)$．

同理可得平面 SBC 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(0，1，1)$．

设平面 SAC 与平面 SBC 夹角为 θ，

所以 $\cos\theta=|\cos<\boldsymbol{n}_1，\boldsymbol{n}_2>|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_2||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以平面 SAC 与平面 SBC 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$．　………………7 分

20．（1）当$n=0$时，赌徒已经输光了，因此$P(0)=1$．当$n=B$时，赌徒到了终止赌博的条件，不再赌了，因此输光的概率$P(B)=0$．　　　………………3 分

（2）记M:赌徒有n元最后输光的事件，N:赌徒有n元下一场赢的事件

$P(M)=P(N)P(M|N)+P(\overline{N})P(M|\overline{N})$

即$P(n)=\frac{1}{2}P(n-1)+\frac{1}{2}P(n+1)$，

所以$P(n)-P(n-1)=P(n+1)-P(n)$，

所以$\{P(n)\}$是一个等差数列．

设 $P(n)-P(n-1)=d$，则 $P(n-1)-P(n-2)=d$，……，$P(1)-P(0)=d$，

累加得 $P(n)-P(0)=nd$，故 $P(B)-P(0)=Bd$，得 $d=-\frac{1}{B}$．

………………6 分

（3）由 $P(n)-P(0)=nd$ 得 $P(A)-P(0)=Ad$，即 $P(A)=1-\frac{A}{B}$.

当$B=200$，$P(A)=50\%$，

当$B=1000$，$P(A)=90\%$，

当$B\to\infty$，$P(A)\to 1$，因此可知久赌无赢家，即便是一个这样看似公平的游戏，只要赌徒一直玩下去就会 100%的概率输光．………………3 分

21.（1）由题意，知 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$ab=2$，所以 $a=2$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.　　　………………4 分

（2）（i）设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

若直线 PQ 的斜率为 0，则点 P，Q 关于 y 轴对称，则 $k_{AP}=-k_{BQ}$，不合题意；

所以直线 PQ 的斜率不为 0，设直线 PQ 的方程为 $x=ty+n$（$n\neq\pm 2$），

则$\begin{cases}x^2+4y^2=4\\x=ty+n\end{cases}$，得 $(t^2+4)y^2+2tny+n^2-4=0$，

由$\triangle=16(t^2-n^2+4)\geqslant 0$，得 $t^2+4\geqslant n^2$.

因为 $y_1+y_2=\frac{2tn}{t^2+4}$，$y_1y_2=\frac{n^2-4}{t^2+4}$.

所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{(x_2-2)y_1}{(x_1+2)y_2}=\frac{(ty_2+n-2)y_1}{(ty_1+n+2)y_2}=\frac{ty_1y_2+(n-2)y_1}{ty_1y_2+(n+2)y_2}=\frac{5}{3}$.

因为 $ty_1y_2=\frac{4-n^2}{2n}(y_1+y_2)$，

所以$\frac{ty_1y_2+(n-2)y_1}{ty_1y_2+(n+2)y_2}=\frac{\frac{4-n^2}{2n}(y_1+y_2)+(n-2)y_1}{\frac{4-n^2}{2n}(y_1+y_2)+(n+2)y_2}=\frac{2-n}{2+n}\cdot\frac{(2+n)(y_1+y_2)-2ny_1}{(2-n)(y_1+y_2)+2ny_2}=\frac{2-n}{2+n}=\frac{5}{3}$，

解得 $n=-\frac{1}{2}$，所以直线过定点（$-\frac{1}{2}$，0）.

（ii）$y_1+y_2=\frac{t}{t^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{15}{4(t^2+4)}$，$t^2+4\geqslant\frac{1}{4}$.

所以$|S_1-S_2|=\frac{1}{2}|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\frac{\sqrt{4t^2+15}}{t^2+4}=\sqrt{-\left(\frac{1}{t^2+4}-2\right)^2+4}\leqslant\frac{\sqrt{15}}{4}$，当 $t=0$ 时等号成立.

所以$|S_1-S_2|$的最大值为$\frac{\sqrt{15}}{4}$.　　　………………8 分

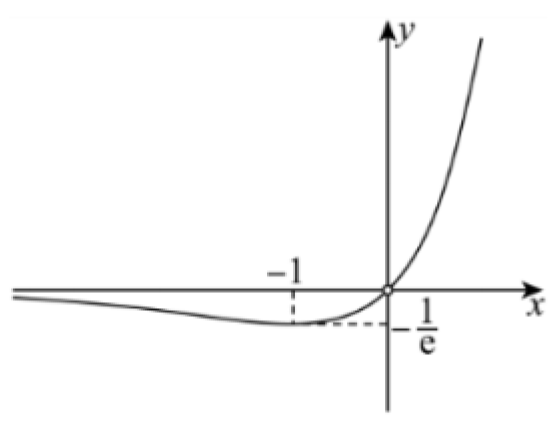
22.（1）由 $f(x)=0$，得 $xe^x=a$（$x\neq 0$）.

设 $h(x)=xe^x$，则 $h'(x)=(x+1)e^x$，

所以，在$(-1,0)$，$(0,+\infty)$上单调递增；在$(-\infty,-1)$上单调递减，

所以 $h(x)_{\min}=h(-1)=-\frac{1}{e}$.

据此可画出大致图象如右，所以



（ⅰ）当 $a<-\frac{1}{e}$或 $a=0$ 时，$f(x)$无零点；

（ⅱ）当 $a=-\frac{1}{e}$或 $a>0$ 时，$f(x)$有一个零点；

（iii）当$-\frac{1}{e}<a<0$时，$f(x)$有两个零点；…………6 分

（2）①当$a=0$时，$e^x>0$，符合题意；

②当$a<0$时，因$x>0$，则$e^x-\frac{a}{x}>0$，

则$e^x-\frac{a}{x}>a\ln x-a$，即$e^x>(\frac{1}{x}+\ln x-1)a$，

设$m(x)=\frac{1}{x}+\ln x-1$，则$m'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$，

所以 $m(x)$在$(0，1)$上单调递减，在$(1，+\infty)$上单调递增.

所以 $m(x)\geqslant m(1)=0$，

所以，当$a<0$时，$e^x>0\geqslant(\frac{1}{x}+\ln x-1)a$，

即 $|f(x)|>a\ln x-a$成立，即$a<0$合题意；

③当$a>0$时，由（1）可知，$h(x)-a=xe^x-a$，在$(0，+\infty)$上单调递增.

又$h(0)-a=-a<0$，$h(a)-a=a(e^a-1)>0$，

所以$\exists x_0\in(0，a)$，使$h(x_0)-a=x_0e^{x_0}-a=0$.

i）当$x\in(0，x_0)$时，$xe^x-a<0$，即$e^x-\frac{a}{x}<0$，

设$g(x)=\frac{a}{x}-e^x-a\ln x+a>0$，

则$g'(x)=-\frac{a}{x^2}-e^x-\frac{a}{x}<0$，所以$g(x)$在$(0，x_0)$上单调递减，

所以$x\in(0，x_0)$时，$g(x)>g(x_0)=-a\ln x_0+a$；

ii）当$x\in(x_0，+\infty)$时，$xe^x-a>0$，即$e^x-\frac{a}{x}>0$，

设$t(x)=e^x-\frac{a}{x}-a\ln x+a>0$，

因为 $t'(x)=e^x+\frac{a}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{x^2e^x+a-ax}{x^2}$，

令$p(x)=x^2e^x+a-ax$，$x\in(x_0，+\infty)$，则$p'(x)=(x^2+2x)e^x-a$，

又令$n(x)=(x^2+2x)e^x-a$，$x\in(x_0，+\infty)$，

则$n'(x)=(x^2+4x+2)e^x>0$，得$n(x)$在$(x_0，+\infty)$上单调递增.

有$p'(x)=n(x)\geq n(x_0)=(x_0^2+2x_0)e^{x_0}-a=ax_0+a>0$，

得$p(x)$在$(x_0，+\infty)$上单调递增，有$p(x)\geq p(x_0)=x_0^2e^{x_0}+a-ax_0=a>0$.

则$t'(x)=\frac{p(x)}{x^2}>0$，得$t(x)$在$(x_0，+\infty)$上单调递增.

则$x\in(x_0，+\infty)$时，$t(x)\geq t(x_0)=-a\ln x_0+a$.

又$x\in(0，x_0)$时，$g(x)>g(x_0)=-a\ln x_0+a$，

得当$a>0$时，$|f(x)|>a\ln x-a$时，$-a\ln x_0+a>0\Rightarrow 0<x_0<e$，

由上可知$a=x_0e^{x_0}$，

$h(x)=xe^x$在$(0，+\infty)$上单调递增，则此时$0<a<e^{e+1}$；

综上可知，a的范围是$(-\infty，e^{e+1})$.　　　………………6 分